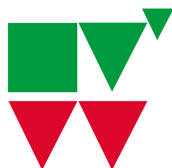
EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

NR.3



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 91 | DECEMBER 2015

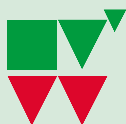
INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 91 NR 3

IN DIT NUMMER

Coverfoto: Te zien is de Turning Torso in Malmö, ontworpen door Calatrave. Fotograaf: Metha Kamminga

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Kort vooraf

In de trein naar huis, na afloop van de jaarvergadering: de ideale plaats om dit redactioneel te schrijven. Dan zit je nog na te genieten van de dag, van alle collegae die je ontmoet hebt, alle voordrachten waar je bij was, de goede organisatie en het welkome gevoel op het Ichthus College. In de trein zat ook Hester Vogels, een van de beheerders van de Facebook-groep *Leraar Wiskunde*. We hadden het er over hoe een oud medium, dit tijdschrift, en een nieuw medium, *Facebook*, elkaar kunnen ondersteunen. Om te beginnen door melding te maken van het bestaan van de Facebookgroep en een oproep te doen om lid te worden! Een van de voordrachten die ik bijwoonde ging over het gebruik van grote datasets in wiskunde A. Op het moment dat u dit leest is de stemweek van de NPO Radio 2 *Top2000* voorbij en heb ik, als huisstatisticus van Radio 2, weer heerlijk zitten grasduinen in het dataparadijs, dat ook ongetwijfeld door velen van u is samengesteld. Honderd-duizenden stemmers die leeftijd, geslacht, postcode en maximaal 25 platen kozen. En ook nog eens massaal mijn enquête over muziekbeleving invulden. Voor diverse media heb ik 'fijne feiten', zoals Frits Spits ze ooit noemde, gegenereerd, tot aan het *Zapp Weekjournaal* toe. Had ik niet drie jaar geleden plechtig en plenair op de jaarvergadering beloofd alles in het werk te stellen om deze datasets voor onder-wijsdoeleinden beschikbaar te krijgen? Het lijkt er op dat een wet over media en privacy die begin dit jaar van kracht werd dat onmogelijk maakt. Terug bij af. Maar er zijn nieuwe invalshoeken om het te blijven proberen!
Mede namens de voltallige redactie van de *Euclides* wens ik u mooie feestdagen en een kleurrijk 2016 toe.

Tom Goris

LOGARITME

EEN BETEKENISVOLLE AANPAK MET HERHAALD DELEN

Pauline Vos
Børge Espedal

Logaritmes staan bekend als lastig onderwerp binnen het wiskundeonderwijs. Pauline Vos en Børge Espedal hebben een alternatieve aanpak voor dit onderwerp uitgeprobeerd, het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt*. In dit artikel geven zij enkele principes van deze aanpak.

Logaritmes waren vanaf de zeventiende-eeuw belangrijk voor het versnellen van lastige berekeningen. Sinds de komst van rekenmachines is het belang van logaritmes veranderd. Ze zijn nu belangrijk als inverse van exponentiële functies, als primitieve van $1/x$ en met een logaritmische schaal kun je handig naast elkaar grote en kleine getallen weergeven. Maar leerlingen maken veel fouten met logaritmes, bijvoorbeeld omdat ze verkeerde regels gebruiken: $\log(a \cdot b) = \log a \cdot \log b$, $\log 1 = 1$ of $\log 0 = 0$. Dergelijke rekenregels onthouden leerlingen verkeerd omdat ze visueel voor de hand liggen en analoog zijn aan bijvoorbeeld de regels voor het kwadrateren: $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, $1^2 = 1$ en $0^2 = 0$. Dat leerlingen de regels niet kunnen onthouden heeft er mee te maken, dat ze aan logaritmes niet goed betekenis kunnen geven.

Herhaald delen tot je bij 1 bent

Een voorbeeld: hoe vaak kun je 1000 delen door 10 voordat je bij 1 uitkomt?
Oplossing: $1000 \underrightarrow{:10} 100 \underrightarrow{:10} 10 \underrightarrow{:10} 1$. Je maakt drie stappen totdat je bij 1 uitkomt. Het aantal stappen, in dit geval 3, is waar het om gaat. We schrijven dit op als: ${}^{10}\log 1000 = 3$.

Het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt*, kun je ook met andere basisgetallen doen: $16 \underrightarrow{:2} 8 \underrightarrow{:2} 4 \underrightarrow{:2} 2 \underrightarrow{:2} 1$. We schrijven de berekening dan op: ${}^{2}\log 16 = 4$.

De aanpak voor logaritmes als een proces met *herhaald-delen-door-10-totdat-je-bij-1-uitkomt* is een omkering van de aanpak voor het machtsverheffen. Zoals machtsverheffen gebaseerd is op herhaald vermenigvuldigen, is de logaritme nu gebaseerd op herhaald delen. Bovenstaande aanpak is heel laagdrempelig, want leerlingen hoeven alleen te kunnen delen en tellen. Een collega, die ons lesmateriaal in een parallelklas gebruikte, bevestigde: 'Deze methode is met name goed voor het inleiden van logaritmes, want hiermee is de overgang van bekend gebied naar onbekend gebied veel vloeiender.'

'HIERDOOR GINGEN DE LEERLINGEN STEEDS BETER INTUÏTIEF BEGRIJPEN DAT LOGARITMES EEN FUNCTIE ZIJN.'

Met het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* kunnen de leerlingen al meteen in de eerste les redeneervragen beantwoorden als:

Wat is … en geef een reden voor je antwoord:
${}^{10}\log 10^n$
${}^{10}\log 10$ en ${}^{a}\log a$
${}^{10}\log 1$ en ${}^{a}\log 1$
${}^{10}\log 0$ en ${}^{a}\log 0$
${}^{10}\log(-300)$ en ${}^{a}\log(-300)$

Het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* is een wiskundige context, die een procesmatige betekenis geeft aan de logaritme. Wij testten het uit in twee 4 havo/vwo klassen[1] en zagen dat ${}^{10}\log 10 = 1$ en ${}^{10}\log 1 = 0$ ook voor zwakkere leerlingen goed toegankelijk bleek, want ${}^{10}\log 10$ kun je beredeneren: je hoeft vanaf 10 maar éénmaal door 10 te delen om bij 1 te komen, dus: ${}^{10}\log 10 = 1$. En ${}^{10}\log 1$ kun je analoog beredeneren, want je hoeft niet éénmaal door 10 te delen om bij 1 te komen: dus ${}^{10}\log 1 = 0$. Direct na de lessenserie kregen de leerlingen een toets, en ruim een maand een *retentietest*. Deze toets was vergelijkbaar met de toets van een jaar eerder. Het bleek dat méér leerlingen een correct antwoord gaven op ${}^{10}\log 1$, en ook dat het vervolgens minder wegzakte (p-waardes op test en retentietest voor de experimentele groep: 51% en 40%, voor de controlegroep: 36% en 21%). Doordat de leerlingen antwoord kunnen geven op het *waarom*, kunnen ze het veel beter onthouden. Ze hoeven het niet als aparte feitjes in hun hoofd te stampen, want ze kunnen het antwoord telkens reconstrueren vanuit het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt*.

Vergelijkingen met logaritmes in de eerste les

Ook de volgende (abstractere) opgaven konden we probleemloos aan het begin van de lessenserie aan de leerlingen voorleggen. Hier enkele voorbeelden:

Los op x:

a) $^{10}\log x = 18$

b) $^{10}\log(3x - 5) = 1$

c) $^{10}\log 1 = x^2$

In de opgaven konden de leerlingen gebruik maken van het *herhaald-delen-door-10-totdat-je-bij-1-uitkomt*. Voor welk getal x heb ik 18 stappen nodig? Daarnaast konden de leerlingen de 'handjes methode' gebruiken (dus dat je een deel van de expressie rondom de x bedekt). In ons onderzoek bleek het correct oplossen van een vergelijking als $^{10}\log(2x + 3) = 1$ significant te verbeteren: de p-waarden voor de experimentele klassen waren: 64% (op de toets) en 35% (op de retentietoets), terwijl dit voor de controlegroep was: 38% (op de toets) en 16% (op de retentietoets).

Schatten van de waarde van logaritmes

Na de inleiding en de eenvoudige vergelijkingen zijn we overgegaan op het schatten van de uitkomst van een logaritme bij getallen die bij het herhaald delen niet precies op 1 uitkomen. Je kunt namelijk een aardige schatting maken, bijvoorbeeld tussen welke gehele getallen $^{10}\log 800$ zal liggen.

Oplossing: $800 \underset{\longrightarrow}{:10} 80 \underset{\longrightarrow}{:10} 8 \underset{\longrightarrow}{:10} < 1$.

We bereiken 1 niet. Twee stappen is te weinig, maar drie is net teveel. Dus: $2 < {}^{10}\log 800 < 3$.

We kunnen zelfs de schatting verbeteren, want de uitkomst moet dichter bij 3 dan bij 2 liggen, omdat 1 dichter bij 0,8 ligt dan bij 8. Op dit punt hebben we de rekenmachine erbij gehaald en gevonden dat: $^{10}\log 800 = 2{,}90$.
Dus inderdaad ligt het antwoord dichter bij 3. Van alle positieve getallen x kun je op deze manier gaan schatten waar $^{10}\log x$ zal liggen. De leerlingen moesten steeds eerst het interval tussen twee gehele getallen aangeven, en vervolgens schatten bij welk geheel getal het dichter zou liggen. Daarna kon er met de rekenmachine gecontroleerd worden.
Door het schatten van de logaritmewaarden consolideerden we het *herhaald-delen-door-10-totdat-je-bij-1-uitkomt*. Hierdoor gingen de leerlingen steeds beter intuïtief begrijpen dat logaritmes een functie zijn: er wordt telkens een getal gekoppeld aan een ander getal.
Volgens het Noorse curriculum hoefden we ons alleen te richten op de logaritmes met basis 10. We denken dat men ook goed kan wisselen naar andere basisgetallen en dan kunnen leerlingen beredeneren hoe groot bijvoorbeeld $^{2}\log 100$ zal zijn. Ook dit kan met schatten: $^{2}\log 100 > 6$, want $^{2}\log 64 = 6$. En $^{2}\log 64 < 7$ want $^{2}\log 128 = 7$. Leerlingen kunnen dan beredeneren, dat $^{2}\log 100$ een tikje dichter bij 7 dan bij 6 zal liggen. Voor het controleren hebben veel rekenmachines tegenwoordig ook een knop.

VERSCHENEN

UITGEREKEND



Ondertitel:
Het opzienbarende van getallen
Auteur: Herman Ligtenberg
Uitgever: Uitgeverij Elmar, Delft (2015)
ISBN: 978 90 389 2475 5
Prijs: € 16,95
(224 pagina's; paperback)

Van de site van de uitgever

Wetenschap! Een woord dat bij veel mensen associaties oproept met wereldvreemde onderzoekers die nergens meer plezier in hebben dan het publiek een giftige cocktail voor te zetten van onbegrijpelijke formules en weerzinwekkende berekeningen. Merkwaardig is dan weer dat, als zich een nieuwe ontwikkeling aandient, de neuzen toch weer één kant opgaan: voor natuurverschijnselen en wetenschappelijke ontdekkingen is blijkbaar veel meer belangstelling dan men vaak wil toegeven. Het gaat immers om één van de pijlers van onze moderne samenleving. Mooi dus dat je nogal eens vragen kunt horen stellen als:

- Hoe werkt een annuïteitenhypotheek?
- Welke trucs passen snelrekenaars toe?
- Hoe kan een verkeerslicht ingesteld worden?
- Welke snelheid moet een raket hebben?
- Hoe kan een gemiddelde bepaald worden?
- Welke betekenis heeft Einstein voor de natuurwetenschap gehad?

Uitgerekend! Een woord dat na 40 jaar dienst in het onderwijs in de vakken wis- en natuurkunde wel zo ongeveer op de schrijver van toepassing is. Dit boek wil een ontdekkingstocht zijn, waarbij nergens een panoramisch overzicht wordt geboden, maar wel interessante zijpaadjes worden ingeslagen en we ons laten verrassen door aardige doorkijkjes.
Kortom: er wordt een poging gedaan om tastbaar te maken wat 'die rekenaars' bezielt, en waarom zij van de vele adembenemende eigenschappen van getallen en hun vaak ongedachte toepassingsmogelijkheden – ook in het leven van alledag – zo intens in vervoering kunnen raken.

Redeneren met rekenregels

De aanpak met het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* geeft veel mogelijkheden tot redeneeropgaven, ook als je zoals wij alleen 10 gebruikt als basis. We vroegen de leerlingen verbanden te leggen en te generaliseren. We hebben eerst de leerlingen laten nadenken over een samenhang tussen log8, log800 en log80000. De leerlingen vonden het heel logisch, dat $^{10}\log 80000 = 2 + {}^{10}\log 800 = 2 + 2{,}90 = 4{,}90$. Het is gewoon een kwestie van redeneren over het aantal stappen van de herhaalde deling totdat je 1 bereikt. Vanaf 80000 moet je twee stappen meer maken dan vanaf 800. In de klas zagen we de leerlingen met hun vingers het aantal nullen bedekken om de stappen te tellen. Ze bedachten dus zelf een snellere manier dan de lange 'staartdeling' met de pijltjes, die we op het bord maakten.

De aanpak van het herhaald delen is goed te gebruiken voor het geven van betekenis aan regels zoals:

$^{10}\log(10^n \cdot a) = n + {}^{10}\log a$
$^{10}\log(a^n) = n \cdot {}^{10}\log a$
$^{\sqrt{10}}\log a = 2 \cdot {}^{10}\log a$ (want tweemaal delen door $\sqrt{10}$ is gelijk aan éénmaal delen door 10)

Bovenstaande regels zijn machtsregels rondom de logaritmes en kunnen door de leerlingen zelf beredeneerd worden. Het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* heeft echter ook beperkingen, want dat $^{10}\log 0{,}001$ een negatief getal oplevert, krijgt geen duidelijke betekenis door het herhaald delen. Ook de rekenregels voor vermenigvuldiging en deling kregen geen duidelijke betekenis. We zagen dat leerlingen hierbij toch weer vervielen in een soort 'ik doe de regel, maar begrijp het niet.' Daarom adviseren we om bij de aanpak met *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* eerst de leerlingen met de machtsregel te laten redeneren, dus $^{b}\log(a^n) = n \cdot {}^{b}\log a$, en pas daarna over te gaan op regels voor vermenigvuldiging en deling, en dat logaritmes de inverse zijn van machtsverheffen.
We weten niet of de aanpak met *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* ook beter werkt dan de aanpak, die gebaseerd is op plantengroei (waarin de logaritme de tijdsfactor van de groei is). Ook verduidelijkt de aanpak van het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* niet de relevantie van logaritmes. Waarom zou je herhaald gaan delen? We hebben daarom de lessen ook verlevendigd met illustraties van toepassingen van logaritmes (geluidsmetingen, aardbevingen, enz) en het gebruik van de logaritmische schaal. Dit werd door diverse leerlingen gewaardeerd, al waren er ook die de illustraties onnodig vonden.
Ten slotte: in de experimenteer-klassen vroegen we drie maanden na de inleiding op logaritmes aan de leerlingen om de volgende getallen van groot naar klein te ordenen: 5, 5!, log5 en $\sqrt{5}$ (zonder rekenmachine uiteraard). Bijna alle leerlingen konden dit moeiteloos. Het betekent voor ons, dat ze log5 als iets handzaams zagen en dat ze het proces van herhaald delen goed onthouden hadden en functioneel konden inzetten om een schatting van een logaritme-waarde te maken.

Noot en verwijzing

[1] Er is in Noorwegen geen scheiding tussen wiskunde A of B, noch tussen havo en vwo.

Op *www.vakbladeuclides.nl/913vos* vindt u het artikel met een extra paragraaf waarin dieper ingegaan wordt op de wiskundig didactische achtergronden van deze methode, inclusief verwijzingen naar literatuur over dit onderwerp.


vakbladeuclides.nl/913vos

Over de auteurs

Pauline Vos is hoogleraar Mathematics Education aan de Universiteit van Agder (Noorwegen). E-mailadres: *fpvos@hotmail.com*. Børge Espedal is wiskundedocent aan Vågsbygd Videregående Skole (Kristiansand, Noorwegen). In het kader van zijn masterstudie schreef hij hoofdstuk-vervangend lesmateriaal en voerde hij een ontwerponderzoek uit.

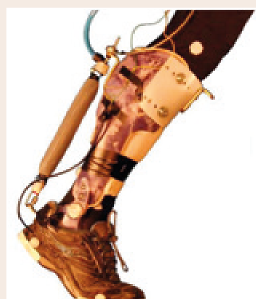
WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*.

Lachwekkend wiskundig onderzoek

Aan Elisabeth Oberzaucher en Karl Grammer (Oostenrijk) werd de Nobelprijs voor het lachwekkendste wiskundige onderzoek uitgereikt. Hun onderzoek betrof 'het inzetten van wiskundige technieken om te bepalen hoe Moulay Ismael de Bloeddorstige, keizer van Marokko tussen 1697 en 1727, achthonderdachtentachtig kinderen verwekte.' Maar eigenlijk... wilden de onderzoekers weten welk computermodel het meest geschikt is om menselijke voortplanting na te bootsen. Snapt ú het? Bron: *de Volkskrant*

Wiskundige modellen voor robotlaarzen



Onderzoekers Wietse van Dijk en Cor Meijneke hebben robotlaarzen gemaakt die een extra zetje geven wanneer je afzet met je hiel. Hierdoor moet lopen makkelijker worden. Vooralsnog voelt de beweging onnatuurlijk aan waardoor gebruikers, mensen met een spierziekte of revalidanten, een andere loophouding aannemen. Ze gaan op hun tenen lopen en gebruiken niet minder energie. Door betere wiskundige modellen van de looptechniek van de mens te ontwikkelen, hopen de onderzoekers uiteindelijk hun robotlaarzen te kunnen verbeteren. Bron: *Delft Integraal*

Pythgoras in de keuken



Bovenstaande titel sierde op een dag de kookrubriek van *De Volkskrant*. Zo'n recept kun je als wiskundedocent uiteraard niet overslaan. Natuurlijk wist ú al dat Pythagoras vegetarisch was, maar voor de auteur van de kookrubriek was dit nieuws en aanleiding voor het bedenken van Griekse vegetarische pasteitjes (*tiropitakia*) in de vorm van rechthoekige driehoeken. Zij kon dus niet alleen koken maar had ook nog opgelet in de wiskundeles. Nieuwsgierig? Ontdooi 225 gram filodeeg. Smelt 20 gram boter en doe er twee eetlepels bloem door. Voeg aan het mengsel voorzichtig vier eetlepels sojaroom en daarna 150 gram Griekse yoghurt toe. Verbrokkel 150 gram feta erboven en roer alles met 50 gram gruyère, 30 gram peterselie, 30 gram bieslook en wat zwarte peper door elkaar. Filodeeg, in repen van 10 bij 20 cm, insmeren met olie en vulling erin. Dan rechthoekige driehoeken maken door diverse keren te vouwen. Op *YouTube* zijn hiervan filmpjes te zien. Leg alle 20 á 25 driehoekjes op een ingevette ovenplaat en bak ze in een voorverwarmde oven 15 minuten op 200 graden. Lekker op een tafel van Pythagoras en bij de brunch, aldus de kok.

Tachtig jaar oud probleem deels opgelost

In 1932 poneerde de Hongaarse wiskundige Paul Erdös het zogenaamde discrepantievermoeden: neem een oneindige willekeurige rij bestaande uit de getallen +1 en -1. Neem binnen deze rij een eindig aantal termen op gelijke afstand van elkaar, bijvoorbeeld de tweede, de vierde en de zesde term. Of de vijfde, de tiende, de vijftiende en de twintigste term. Tel dit eindig aantal termen bij elkaar op. Erdös vroeg zich af hoever deze som van 0 kon afwijken. Willekeurig ver vermoedde hij. Boris Konev en Alexei Lisitsa lieten met behulp van de computer en zogenaamde SAT-software zien dat binnen de eerste 1160 termen van een ±1 rij de bedoelde afwijking soms niet verder komt dan 2, maar dat binnen de eerste 1161 termen de afwijking altijd minstens 3 is. Een gevolg hiervan is dat van elke oneindige ±1 rij de discrepantie minstens 3 is. Bron: *NRC Weekend*

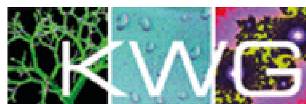
Wolfert Tweetalig wint wiskundetoernooi

Het team van het Wolfert Tweetalig uit Rotterdam heeft het 24e wiskundetoernooi van de Radboud Universiteit op overtuigende wijze gewonnen. Met name in de eerste ronde, de estafette, was het team veruit het beste. Het Wolfert Tweetalig scoorde daarin 420 punten, de directe achtervolgers kwamen maar tot 310 punten. Het team van Gymnasium Beekvliet uit Sint-Michielsgestel eindigde als tweede. Deze twee prijswinnende teams mogen nu samen op reis naar Dublin. De troostprijs, een stedentrip naar Gent, werd gewonnen door een team van het Driestar College uit Gouda. Totaal namen honderd teams deel aan het wederom geslaagde wiskundetoernooi. Meer over dit evenement is te vinden op *www.ru.nl/wiskundetoernooi/*

AANKONDIGING WINTERSYMPOSIUM KWG 2016

ANALYTISCHE MEETKUNDE

Zaterdag, 9 januari 2016, Academiegebouw van de Universiteit Utrecht (Domplein)
Tijd: 11.00–16.00



Het wintersymposium 2016 van het Koninklijk Wiskundig Genootschap heeft als thema analytische meetkunde. Dit is onderdeel van de curriculumvernieuwing wiskunde op havo en vwo. In het symposium nemen vier wetenschappers u mee in verschillende facetten van analytische meetkunde.

Sprekers

- Jeroen Spandaw (TU Delft) geeft de *Inleiding in de analytische meetkunde* en diverse tradities die hieruit zijn ontstaan. Hij zal het kader schetsen waarin de thema's van de andere drie sprekers kunnen worden geplaatst.
- Jaap Top (Rijksuniversiteit Groningen) zal in zijn voordracht *Meetkunde met* $b^2 - 4ac$ ingaan op een nieuwe beleving van de bekende discriminant uit de schoolwiskunde. Dat doet hij aan de hand van ideeën van de negentiende-eeuwse wiskundige Felix Klein.
- Viktor Blåsjö (Universiteit Utrecht) geeft een voordracht met de veelzeggende titel *Waarom zeventiende-eeuwse meetkundigen formules wantrouwden*. Hij zal laten zien hoe wiskundigen, gedreven door dit wantrouwen, de betekenis van formules concreet gingen maken aan de hand van kettingen, stroop, en allerlei bewegende instrumenten.
- Remco Duits (TU Eindhoven) zal het publiek meenemen naar toepassingen van de meetkunde in een heel andere discipline in zijn voordracht *De dronkenmanswandeling, -rit en -vlucht, toegepast in medische beeldverwerking*. Hij zal, aan de hand van enerzijds theorie over Riemannse variëteiten en anderzijds tastbaar materiaal in de vorm van 3D-prints, laten zien hoe analytische meetkunde gebruikt wordt in bijvoorbeeld hersenchirurgie.

Het symposium is in de eerste plaats bestemd voor docenten wiskunde: van docenten in opleiding tot ervaren docenten. Ook voor leerlingen en collega's van andere vakgebieden kan het symposium interessant zijn. Alle belangstellenden zijn van harte welkom. Zegt het voort!

Inschrijving

Het volledige programma, inclusief uitgebreidere beschrijvingen van de lezingen, is te vinden op de website van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, *www.wiskgenoot.nl*. Op deze website vindt u ook het digitale inschrijfformulier. De kosten voor deelname aan het symposium bedragen voor KWG-leden € 30, voor niet-leden € 35 en voor leerlingen, studenten en standhouders € 15 (dit is een deel van de kosten voor de lunch). De bijdrage is inclusief lunch en consumpties gedurende de dag. Bij betaling na 29 december 2015 worden de deelnamekosten met € 5,00 verhoogd. Nadere inlichtingen: Theo van den Bogaart, *theo.vandenbogaart@hu.nl*, telefoon: (06)23375306.

VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

UITDAGING

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



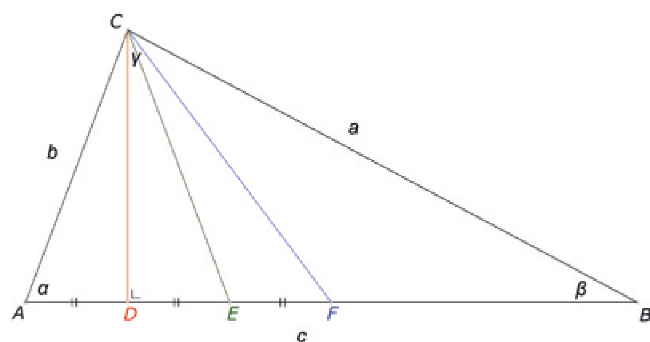
Deze keer twee opgaven uit de jaren vijftig die mooi passen in het nieuwe vwo-programma. Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u ze wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

Opgave 1 (1950)
In de scherphoekige driehoek *ABC* is *CD* een hoogtelijn, *CE* een bissectrice en *CF* een zwaartelijn.
Gegeven is: *AD* = *DE* = *EF*.

a. Bewijs planimetrisch dat $\gamma = 2(\alpha - \beta)$ en dat $AD = \frac{1}{6}c$;
b. Bereken daarna de hoeken van driehoek *ABC*;
c. Bewijs dat *CD* gelijk is aan 7/8 van de straal van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*.

Opgave 2 (1952)
Als *a, b* en *c* de zijden van een driehoek zijn, α, β en γ de hoeken en d_1, d_2 en d_3 de bissectrices van deze hoeken, dan geldt de betrekking: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha}{d_1}$. Bewijs dit.

Lukt het u verder?
En een extra vraag achteraf: Hoe heeft de maker van de eerste opgave deze wellicht gecomponeerd?



figuur 1

Opgave 1 – zie figuur 1 voor een werkschets.

Onderdeel a:
Driehoek *ACD* is congruent met driehoek *ECD* (*ZHZ*). Dit geeft $\angle A = \angle DEC = \alpha$, $\angle BEC = 180° - \alpha$.
De hoekensom in driehoek *BEC* geeft ½γ + (180° – α) + β = 180°, dus γ = 2(α – β).
Stel *AB* = 6, dan *AF* = *FB* = 3 en *AD* = *DE* = *EF* = 1, dus $AD = \frac{1}{6}c$.

Onderdeel b:
De bissectricestelling geeft $\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{BE} = \frac{2}{4}$, dus *BC* = 2 · *AC*.
In driehoek *ADC* geldt *CD* = tanα en $AC = \frac{1}{\cos\alpha}$, dus

(1)... $BC = \frac{2}{\cos\alpha}$

De stelling van Pythagoras in driehoek *DBC* geeft dan

$$5^2 + \tan^2\alpha = \frac{4}{\cos^2\alpha}$$

Gebruik nu: $\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, zodat $\tan^2\alpha = 7$

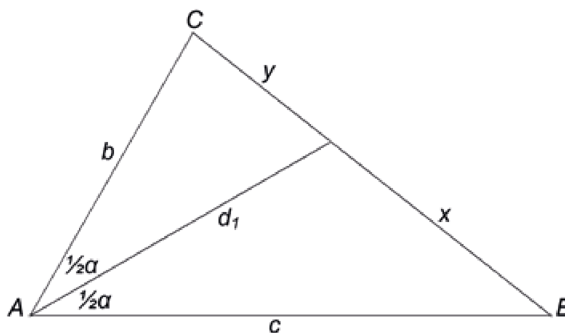
Omdat α scherp is, geldt $\tan\alpha = \sqrt{7}$, zodat α ≈ 69,295...°. ∠*ACD* = 90° – α , zodat ∠*ACE* = 2(90° – α) dus γ = ∠*ACB* = 2 · ∠*ACE* = 4(90° – α) ≈ 82,819...°.
Dus β ≈ 27,885...°.

Onderdeel c:
De uitgebreide sinusregel luidt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$, waarbij *R* de straal van de omgeschreven cirkel is van driehoek *ABC*.
Vul (1) in, zodat we krijgen:

$$\frac{2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha\sin\beta} = \frac{6}{\sin\gamma} = 2R$$

Ook staat in (1) dat *CD* = *h* = tanα, zodat $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{h}$, waardoor uit de vorige regel volgt:



figuur 2

(2)... $\frac{h}{\sin^2 \alpha} = R$

Al eerder vonden we $\tan^2\alpha = 7$, zodat met behulp van

$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ volgt: $\cos^2 \alpha = \frac{1}{8}$, dus $\sin^2 \alpha = \frac{7}{8}$

Vul dit in bij (2) waarmee onderdeel c af is.

Opgave 2 – zie figuur 2 voor een werktekening.
Deze opgave is algebraïsch, maar past wel mooi in het nieuwe curriculum vwo.

De bissectricestelling levert op: $\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$, dus $y = \frac{b}{c} \cdot x$

Cosinusregel in onderste driehoek:

$$x^2 = c^2 + d_1^2 - 2cd_1 \cos(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Cosinusregel in bovenste driehoek:

$$y^2 = \frac{b^2}{c^2}x^2 = b^2 + d_1^2 - 2bd_1 \cos(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Eliminatie van x levert op:

$$0 = d_1^2 - \frac{b^2 d_1^2}{c^2} + \left(\frac{b^2 d_1}{c} - bd_1\right) \cdot 2\cos(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Hieruit volgt (na enig herleidwerk; lukt dat u?):

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha}{d_1}$$

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958).* Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

HET FIZIER GERICHT OP...

ANTI-DIDACTISCHE INVERSIE

Michiel Doorman



In FIzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk.

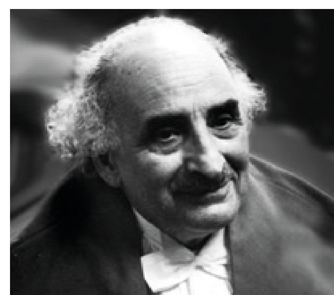
Het gebeurt wel eens dat de tekst op de kaft van een boek allerlei associaties oproept. Onlangs verscheen een boek van Langendorff met observaties en gesprekken met wiskundigen. Op de kaft staat het volgende:

Wiskundigen presenteren ons uitsluitend het eindresultaat, de keurige kant-en klare formules waar de meesten van ons niets van snappen. Wat eraan voorafging, daarover horen we niets. De schoonheid van de wiskunde is het eindproduct. (Langendorff, 2015)

De associaties die deze kaft bij mij opriep hadden te maken met de personen Mach, Euclides en Freudenthal en eindigden bij een reflectie op ons wiskundeonderwijs. Het ging als volgt. De observatie van Langendorff is al vaker gedaan en geldt natuurlijk niet voor alle wiskundigen. Echter, velen kiezen wel de elegantie en effectiviteit van de beschrijving van het eindproduct van hun onderzoek als uitgangspunt. Een beschrijving die dan start met definities en via lemma's en corollaria de lezer naar de hoofdstellingen leidt. Dit heeft echter als gevolg dat het zoekproces, het avontuur en het falen plaats hebben gemaakt voor in beton gegoten resultaten. Dat aandacht voor de ontstaansgeschiedenis wel eens een ondergeschikte rol speelt, observeerde ook de Duitse filosoof Mach aan het begin van de twintigste eeuw:

Meer dan in elke andere wetenschap is het in de wiskunde gebruikelijk om ieder spoor van haar historische ontwikkeling uit te wissen. (Mach, 1905)

Het risico van deze werkwijze is dat zo'n vaksystematische ordening ook bepalend wordt voor de opbouw van een leergang. *Euclides' Elementen* zijn daarvan het meest illustratieve voorbeeld. De meetkunde wordt daarin zorgvuldig opgebouwd vanuit definities (een punt is wat geen deel heeft en een lijn is breedteloze lengte) en axioma's (twee punten kunnen verbonden worden door een rechte lijn). Oorspronkelijk zijn *De Elementen* waarschijnlijk bedoeld als een geordende encyclopedie van de meetkunde. Maar later is het vaak als leerboek gebruikt. Een nadeel van zo'n aanpak is dat het een tijd duurt totdat interessante resultaten aan de orde komen (bij stelling 1.10.3 wordt bewezen dat de drie middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan). En pas nadat leerlingen het beoogde systeem eigen gemaakt hebben, volgen de toepassingen. Toepassingen die gelijkenis kunnen hebben met de probleemsituaties die aanleiding vormden voor de meetkundige begrippen en methoden. Freudenthal, zie figuur 1, noemde deze aanpak een inversie. Een omkering van de gang van zaken: eindigen met toepassingen die eigenlijk aan het begin van de zoektocht stonden. Volgens Freudenthal is het gevolg van deze inversie dat het voor leerlingen volstrekt onduidelijk is waar de eerste definities voor dienen en waar de leergang hen naar toe zal leiden. Deze omkering noemde hij daarom een *anti-didactische inversie*.

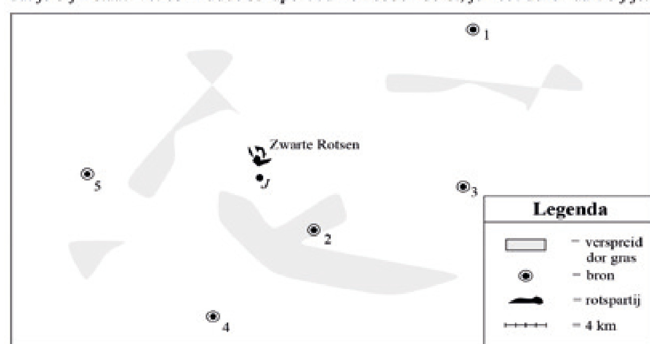


figuur 1 Hans Freudenthal

Wat is een alternatief? De historische ontwikkeling volgen volgens een zogenaamde genetische methode? Zo'n aanpak biedt kansen, maar heeft ook haar beperkingen. Onze leerlingen hebben andere ervaringen, andere intuïties, we hebben andere hulpmiddelen tot onze beschikking en vermoedelijk zijn de problemen die wetenschappers in het verleden probeerden te tackelen niet de problemen waarmee we leerlingen nu willen confronteren. Freudenthal zag meer in het zogenaamde *geleid heruitvinden*: het zelf mogen creëren van wiskunde door de leerling onder begeleiding van zorgvuldig gekozen activiteiten, hulpmiddelen en klassengesprekken. In Freudenthal's biografie staat het principe mooi beschreven:

Concreet beginnen met het wiskundeonderwijs, leerlingen de kans geven te experimenteren en onderzoeken, de stof aanbieden in een mate van exactheid die bij het niveau van de leerling op dat moment hoort, het was allemaal verpakt in de term geleide heruitvinding (La Bastide-Gemert, 2006).

De leerling wordt geholpen om via een geleidelijk constructieproces van voortschrijdende abstractie en formalisering wiskundige kennis te verwerven. Daarbij is het taak voor de docent om in de gesprekken met de leerling de accentverschuiving van het oplossen van concrete problemen naar het reflecteren op gehanteerde methoden en naar het generaliseren. De definities volgen aan het eind, om het systeem (misschien tijdelijk) sluitend te maken. Een mooi voorbeeld is de volgende opgave: Gegeven is een kaart van een stuk woestijn met vijf bronnen. De vraag is om de woestijn zo in te kleuren dat ieder gebied van waar je naar een van de vijf bronnen gaat een eigen kleur heeft. Overal in één zo'n gebied moet de bijbehorende bron de meest nabije zijn, zie figuur 2.[1] Deze context is al enigszins gemathematiseerd en doet natuurlijk niet direct een beroep op ervaringen van leerlingen. De context is hier meer een uitdrukkingsmiddel die bruikbare taal en strategieën oproept.



figuur 2

Aan de hand van dit probleem ontdekken leerlingen dat het eigenlijk om het vinden van de grenzen gaat, dat die grenzen recht lijken te lopen en dat er punten zijn waar drie van die rechte grenzen bij elkaar komen. Dat levert allerlei aanleidingen om meetkundig te redeneren, middelloodlijnen te introduceren en zelfs een stelling over driehoeken te onderzoeken. Pas aan het eind wordt duidelijk welk wiskundig gereedschap ontwikkeld wordt en welke definities nodig zijn om dat gereedschap een stevig fundament te geven. De opgave is oorspronkelijk ontwikkeld voor de bovenbouw van het vwo, maar ik weet dat docenten dit probleem ook in de tweede klas gebruiken. Dat kenmerkt een rijk probleem: het is op vele niveaus aan te pakken en de oplossingen bieden allerlei aanleidingen voor abstractie en formalisering. En zo bracht de tekst van de achterflap ons tot enkele bespiegelingen op wiskunde, het presenteren van wiskunde en ons wiskundeonderwijs.

Noot en referenties

[1] Zie *www.fisme.science.uu.nl/nl/profi/documents/meetkunde1_afstanden.pdf*

Langendorff, T. (2015). *Denken wiskundigen wel zo exact? Observaties en gesprekken.* Amsterdam: Athenaeum.
La Bastide-van Gemert, S. (2006). *'Elke positieve actie begint met critiek': Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde.* Hilversum: Verloren. *http://irs.ub.rug.nl/ppn/293114749*
Mach, E. (1905). *Erkenntnis und Irrtum: Skizzen zur Psychologie der Forschung.* Leipzig: Johann Ambrosius Barth.

Over de auteur

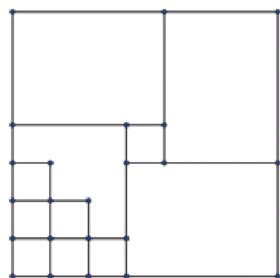
Michiel Doorman is bij het Freudenthal Instituut betrokken bij verschillende (internationale) projecten, zoals MaSciL (Mathematics and Science for Life) en de organisatie van de Nationale Wiskunde Dagen.
E-mailadres: *m.doorman@uu.nl*

VASTGEROEST

Ab van der Roest

HERMAN GAAT MET PENSIOEN

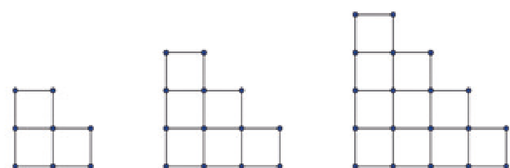
Aan het einde van het schooljaar moet je soms afscheid nemen van collega's. Niets bijzonders, maar soms is dat het toch anders. Ab van der Roest vertelt over Herman.



figuur 1

Dit jaar gaat Herman stoppen. Hij is docent natuurkunde, met een meer dan gemiddelde belangstelling voor weetjes uit de wiskunde. Hij bevraagt me daar regelmatig op en hij verwacht van mij dat ik die weetjes ook ken en minstens erover kan praten. Dat valt vaak wel tegen. Dit keer ging het over driehoeksgetallen. Je kunt driehoeksgetallen met een plaatje weergeven, zie figuur 1: Je ziet hier de driehoeksgetallen 3, 6 en 10. Als je twee dezelfde driehoeksgetallen op elkaar tekent (wel even 180° draaien), dan ontstaat een rechthoek. Dit leidt tot een formule van de driehoeksgetallen: $\frac{1}{2}n(n + 1)$.
Als $n = 2$, dan krijg je het driehoeksgetal 3 en daarom noemen 3 het tweede driehoeksgetal. 1 is het eerste.
Als we twee opvolgende driehoeksgetallen optellen, dan ontstaat een kwadraat. Bijvoorbeeld 10 + 6 = 16. In het plaatje is het makkelijk te zien: het n-de opgeteld bij het $(n + 1)$-de geeft een vierkant van $n + 1$ bij $n + 1$.
Dit kun je natuurlijk ook narekenen met de formule: $\frac{1}{2}n(n + 1) + \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) = \frac{1}{2}(n + 1)[n + n + 2] = \frac{1}{2}(n + 1)(2n + 2) = (n + 1)^2$. Of, als je een driehoeksgetal vermenigvuldigt met 8 en bij het antwoord 1 optelt, is het antwoord altijd een kwadraat. Met een tekening mooi te illustreren, zie figuur 2. Met de formule kan het natuurlijk ook: $8 \times \frac{1}{2}n(n + 1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$. Dit is bij veel collega's wel bekend. Leuk om te gebruiken in een laatste les, of in een verloren kwartiertje. Stiekem wat algebra oefenen, of gewoon serieus in een les te behandelen. Herman wees me op een ander verband. Omdat de driehoeksgetallen gevonden worden met $\frac{1}{2}n(n + 1)$, kunnen we het omgekeerde van een driehoeksgetal schrijven als

$$\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$



figuur 2

Dit levert de volgende serie sommen op:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{2} - \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{6} = \frac{2}{3} - \frac{2}{4}$$
$$\frac{1}{10} = \frac{2}{4} - \frac{2}{5}$$
$$\frac{1}{15} = \frac{2}{5} - \frac{2}{6} \quad \text{enzovoorts.}$$

Maar, dat was nog niet alles. Bekijk de som van de opvolgende omgekeerde driehoeksgetallen:

$$\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{4}{6}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} = \frac{5}{7}$$

Dit is een mooie regelmaat en de uitkomsten gaan richting 1. Nader onderzoek is geboden. Eerst de som bekijken en vervolgens de limiet nemen:

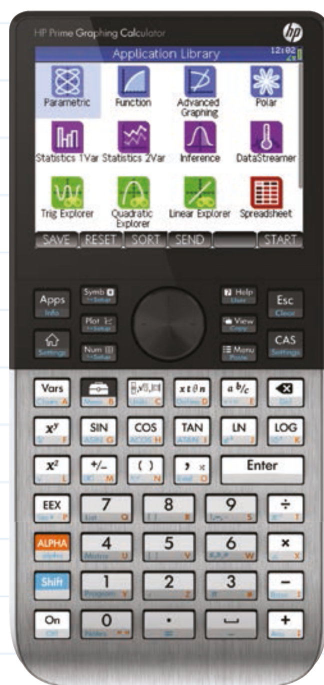
$$\sum_{i=2}^{n} \frac{2}{i(i+1)} = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{2}{i} - \frac{2}{i+1} \right) = 1 - \frac{2}{n+1}$$

Als we de som uitschrijven krijgen we afwisselend $+\frac{2}{i}$ en $-\frac{2}{i}$ en we houden dus alleen de eerste en de laatste term over. Als we de limiet nemen, dan zien we dat de oneindige som gelijk is aan 1. Toen we hier een paar weken geleden nog even over doorpraatten, wees hij me er op dat Martin Kindt er ook wel over geschreven heeft in de *Nieuwe Wiskrant* (*www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/323/323maart_wtbi60.pdf*). Herman gaat met pensioen. Ik heb hem mijn e-mail adres gegeven, want ik ga deze weetjes missen. Na het schrijven van dit stukje vertelde Herman dat hij een boekje geschreven heeft: Uitgerekend! Met als ondertitel: het opzienbarende van getallen. Zie elders in deze *Euclides* een *Verschenen* van dit boekje. Zo kunt u ook genieten van de wiskundige kennis van Herman.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*





New Body & New Brain

HP Prime



Geen upgrade van een bestaande machine, maar een nieuwe processor, veel geheugen en het beste scherm.

- HP Prime; een krachtige grafische rekenmachine met een touchscreen scherm
- Krachtige applicaties o.a. voor Functie-onderzoek, plotten van impliciete functies, Spreadsheet, Meetkunde, Statistiek, CAS en meer!
- Schets een functie met uw vinger op het scherm, waarbij HP Prime het functievoorschrift genereert
- HP Prime wordt altijd geleverd inclusief emulator (dus ook voor uw leerlingen)!



Voor meer informatie en ondersteuningsmaterialen voor in de klas gaat u naar:

www.hp-prime.nl

Voor een docentenworkshop of demo-units neemt u contact op met **p.schadron@hp-prime.nl**

GECIJFERDHEID

Kees Hoogland

In deze interactieve rubriek belicht Kees Hoogland aspecten van gecijferdheid. Deze keer: als je getallen genoeg martelt, vertellen ze alles.[1] De schatting is dat er dit jaar 50.000 vluchtelingen naar Nederland komen.[2]

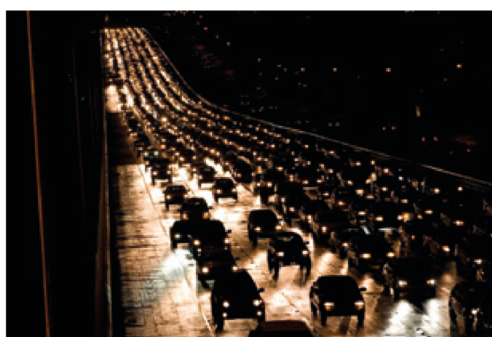


Hoe laat je zien dat er weinig vluchtelingen in Nederland worden opgevangen?



figuur 1

- er zijn in Nederland 30 gemeenten met meer dan 100.000 inwoners en nog eens 40 met meer dan 50.000. En 30 keer 1000 plus 40 keer 500 is 50.000;
- van de 7,5 miljoen woningen in Nederland staan er permanent 450.000 leeg, waarvan 100.000 direct beschikbaar;
- er zijn 3.000.000 huurwoningen in Nederland. Bij eens in de tien jaar verhuizen neemt de wachttijd voor een huis met twee weken toe bij het huisvesten van 50.000 extra mensen;
- er zijn wereldwijd 60 miljoen mensen op de vlucht. Wij vangen daar maar 0,08 % van op;
- je kunt de hele wereldbevolking van 7 miljard in bed leggen in de provincies Utrecht en Flevoland (120 km bij 120 km). We hebben het hier over 50 duizend mensen;
- voor elke wedstrijd of concert in de Arena vult het stadion zich met 50.000 mensen en die zijn twee uur na afloop onvindbaar verdwenen in een gebied met een straal van 150 kilometer rond het stadion.



figuur 2

Hoe laat je zien dat er veel vluchtelingen naar Nederland komen?

- als ze met de auto zouden komen zou er aan de grens een file van 80 kilometer staan;
- dat is 50 opvangkampen met 1000 mensen, waarvan altijd wel eentje binnen een straal van 25 kilometer van uw huis;
- dat is 3% van onze bevolking. Nog 15 jaar zo doorgaan en het is bijna de helft van onze bevolking;
- met € 20.000 kosten per vluchteling kost het ons zo al ongeveer 1 miljard euro;
- er zijn wereldwijd 2 miljoen vluchtelingen op drift, waarvan Nederland er 2,5% opvangt. Terwijl wij maar 0,2 % van de wereldbevolking zijn;
- de wachttijd voor een sociale huurwoning in Nederland is gemiddeld 8 jaar.

Gepresenteerde cijfers zijn nooit waardenvrij. Misschien is het daarom maar beter dit onderwerp te benaderen met compassie in plaats van met getallen. Durft u deze bladzijde te bespreken in de klas? Laat het me weten.

Noten

[1] Bron: Gregg Easterbrook, met dank voor het citaat aan Sanne Blauw, correspondent Ontcijferen bij *DeCorrespondent.nl*

[2] Alle cijfers op deze bladzijde komen van officiële instanties, zie *cbs.nl*; *vluchtelingenwerk.nl*; *unhcr.nl*

Over de auteur

Kees Hoogland is vakexpert rekenen, wiskunde, gecijferdheid bij het SLO. Website: *www.gecijferdheid.nl*.
E-mailadres: *cph@xs4all.nl*

1001 REDENEN WAAROM $2^0 = 1$

Martin Kindt

Dit is het eerste artikel van een serie-van-drie van Martin Kindt over het 'permanentie-principe'. In de wiskunde hebben we de gewoonte om patronen te extrapoleren met behoud van regelmaat en rekenwetten: permanentie op afspraak! Denk aan min maal min is plus of aan nul faculteit is één. Het wonder daarbij is dat al die verschillende conventies met elkaar in harmonie zijn en zo de wiskunde tot een krachtig (en prachtig) bouwwerk maken.

Extrapolatie

Drie jaar geleden werd ik door een van mijn kleindochters gebeld, toen nog een kersverse brugklasser. 'Opa, mijn leraar zegt dat twee tot de nulde één is, dat snap ik niet.' Wiskunde uitleggen door de telefoon, ik heb het vaker gedaan en vind het wel een leuke sport. Ik testte om te beginnen hoe ze machten met hetzelfde grondtal (in dit geval 2) vemenigvuldigde of op elkaar deelde en dat ging vlot via de exponenten en ze snapte ook wat daar achter stak. Mooi, dan nu een rijtje: $2^7 : 2^4 = 2^3$, $2^7 : 2^5 = 2^2$, $2^7 : 2^6 = 2^1$, $2^7 : 2^7 = 2^{...?}$
De laatste uitkomst is 1, dus ... . 'Nou snap ik het opa'.
Ik heb haar natuurlijk uitgelegd dat het eigenlijk niet een kwestie van snappen is, maar meer het aanvaarden van een afspraak die verstandig lijkt. Daarna heb ik er ook nog even de getallenlijn bijgehaald. Stel de afstand tussen twee buurgetallen is 1 cm. Hoeveel cm ligt dan 2^5 van 0? Ja, 32 cm.
En 2^4, en 2^3? Verlaging van de exponent met 1, betekent blijkbaar halveren van de afstand tot 0. Zo kwamen we bij 2^1 op 2 cm en 2^0 op 1 cm van het nulpunt. Je kunt nog verder extrapoleren, naar $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2^{-2} = \frac{1}{4}$, enzovoort, en ook dat sloeg aan!
Als ik eenmaal bezig ben, kan ik moeilijk ophouden en dus kwamen ook nog even andere grondtallen aan de beurt, zo van drie-tot-de-nulde is ook 1. Maar ja, toen kwam de slimme vraag naar nul-tot-de-nulde en heb ik de hoorn erop gelegd? Nee, grapje. Wat ik toen gezegd heb, weet ik niet precies meer. Wel dat er voor $0^0 = 1$ meer te zeggen valt dan voor $0^0 = 0$, exponenten zijn in zekere zin 'machtiger' dan grondtallen.
Tot zover dit telefoon-leergesprek. Ik vermeld nog even dat de vraag van Magali in verband stond met het allereerste hoofdstuk uit haar boek, genaamd *Getallen*, waarin andere talstelsels (en speciaal ook het binaire stelsel) behandeld werden. Zij vond het werken met verschillende talstelsels toen interessant en het ging haar bijzonder goed af. Des te teleurstellender was het dat, toen ik, twee jaar later bij haar thuis, terugkwam op dat gesprek over twee-tot-de-nulde ze er weinig meer van wist. Dat iets-tot-de-nulde gelijk moest zijn aan 1, herinnerde ze zich vaag, maar de achtergrond daarvan en het werken met het binaire stelsel was helemaal weggezakt. Zo gaat dat met wiskunde: wat je niet – op een goede manier – warm houdt, koelt af en verdwijnt naar de kelder van het geheugen. In nummer 6 van de vorige jaargang van *Euclides* staat een artikel van Martijn van Iwaarden dat ik met warme instemming heb gelezen en waarin een aantal vingers op een aantal zere plekken in het gangbare wiskundeonderwijs wordt gelegd. De auteur klaagt daarin over het algoritmisch, niet op begrip gestoeld, aanleren van vaardigheden die een paar weken na de toets als sneeuw voor de zon zijn verdwenen. Nu wil ik niet beweren dat het opereren in alternatieve talstelsels, zoals het binaire, regelmatig terug zou moeten komen en zou moeten worden geoefend, maar alleen aankaarten en er daarna nooit meer over praten, bevalt natuurlijk ook niet. Hoe dan ook, na de teleurstellende ervaring aan tafel, besloot ik voor Magali negen argumenten op te schrijven, waarom twee-tot-de-nulde de waarde 1 verdient. Dat deed ik met de titel van dit stukje als motto en hier komen ze. Voor de aardigheid nummerde ik ze binair.

'ZO GAAT DAT MET WISKUNDE: WAT JE NIET - OP EEN GOEDE MANIER - WARM HOUDT, KOELT AF.'

1 Celdeling

Een bacterie, ééncellig als hij is, vermenigvuldigt zich door celdeling. Een type colibacterie bijvoorbeeld deelt zich onder voor hem gunstige omstandigheden, elke twintig minuten in tweeën. Dat gaat heel hard. Als je met een exemplaar begint, zijn er na 1 uur al 8 exemplaren, na 2 uur 64, na 3 uur 512, na 4 uur 2048 (je weet wel dat getal van 't spelletje op je smartphone). Gelukkig wordt de groei meestal afgeremd en gaat dit niet almaar door. Maar stel je nu even wél een onbeperkte groei voor,

uitgaande van een bacterie. Voor het gemak neem ik aan dat dat verdubbeling elk uur plaatsvindt. Na 10 uur zijn er dan meer dan 1000 bacteriën. Kijk maar naar de tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

t = de tijd in uren
N = het aantal bacteriën

Bij die tabel hoort een formule, deze: $N = 2^t$. Wil deze formule kloppen voor $t = 1$ en $t = 0$, dan moeten we wel afspreken: $2^1 = 2$ en $2^0 = 1$.

10 Wimbledon

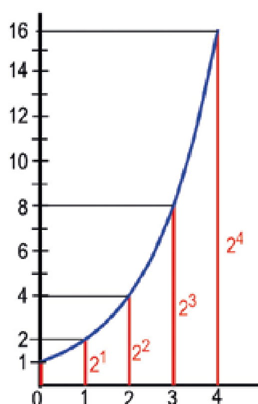
Elk jaar zijn er vier grote tennistoernooien, de zogeheten Grand Slam toernooien. Na de voorrondes begint het hoofdtoernooi 'damesenkel' met 128 speelsters. Elke ronde valt precies de helft van het aantal speelsters af, sport is hard. Ik tel de rondes af, zoals bij het afvuren van een raket: tien, negen, ..., nul. Vanwege $128 = 2^7$ begin ik hier bij zeven.

Zeven: eerste ronde, 128 (= 2^7) speelsters.
Zes: tweede ronde, nog 64 (= 2^6) speelsters.
Vijf: derde ronde, nog 32 (= 2^5) speelsters.
Vier: achtste finale, 16 (= 2^4) speelsters.
Drie: kwart finale, 8 (= 2^3) speelsters.
Twee: halve finale, 4 (= 2^2) speelsters.
Eén: finale, 2 (= 2^1) speelsters.
Nul: 1 (= 2^0) winnares!

P.S.
In totaal worden er $127 = 2^7 - 1$ wedstrijden gespeeld. Hoe reken je dat uit?
* Slim: *er zijn net zoveel wedstrijden nodig als er verliezers zijn!*
* IJverig: 64 + 32 + ... + 2 + 1

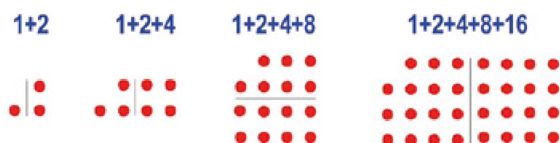
11 Een grafiek

De rode staafjes stellen machten van 2 voor. De toppen van de staafjes liggen op een vloeiende kromme lijn, maar dan moet $2^0 = 1$ zijn!



100 Graankorrels

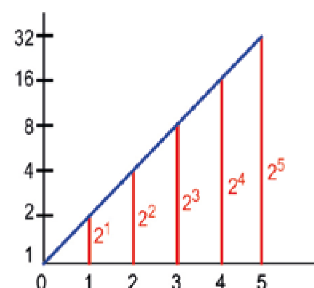
Volgens een oude legende toonde de uitvinder van het schaakspel zijn vinding aan de koning. De slimme uitvinder mocht zelf zijn beloning kiezen. 'Sire', zei de man, 'zo luidt mijn wens. Geef mij alle graankorrels die op de volgende manier worden geteld: 1 korrel op het eerste veld, 2 op het tweede, 4 op het derde, 8 op het vierde, en zo verder verdubbelend tot alle vierenzestig velden aan de beurt zijn geweest.' De koning was verbaasd over zoveel bescheidenheid, maar zijn mening zou spoedig veranderen .... Het aantal graankorrels op elk veld is een macht van 2. Als je naar het volgende plaatje kijkt, zie je wel dat je na vulling van het vijfde veld 31 korrels hebt, dat is $2^5 - 1$.



Je kunt aan het patroon zien, dat dit zo doorgaat.
Als 10 velden gevuld zijn heb je in totaal $2^{10} - 1 = 1023$ korrels, en na vulling van het 64ste veld zijn dat er dus $2^{64} - 1$. Dit is wat je noemt een astronomisch getal. Omdat 2^{10} meer dan 1000 is, moet 2^{64} (= $2^4 \times 2^{60}$) meer dan 16x 1000^6 ofwel 16 triljoen zijn. Zoveel korrels, dat is meer dan de huidige wereldproductie graan van zo'n 2300 miljoen ton! Als je het niet gelooft, zoek het uit! Hoe het afgelopen is? De koning zal eerst radeloos zijn geweest, daarna boos en ...?
Maar nu de wiskunde. In het plaatje is wel af te lezen dat bijvoorbeeld $2^3 + 2^3 = 2^4$. In het algemeen geldt: $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Je kunt dit met algebra bewijzen: $2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. Die formule willen we ook laten kloppen voor $n = 0$, dus $2^0 + 2^0 = 2^1 = 2$, maar 2^0 moet dan wel 1 zijn.

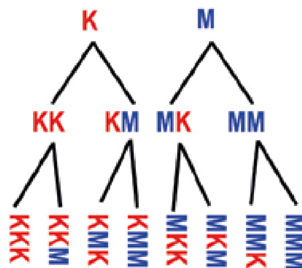
101 Een alternatieve grafiek

De grafiek hieronder heeft een afwijkende schaal op de verticale as: die begint bij 1 en bij elk stapje wordt de coördinaat verdubbeld. Zoiets wordt een *logaritmische schaal* genoemd. Als je de (rechte!) lijn door de toppen van de rode staafjes door laat lopen naar links, kom je bij het punt 1 op de verticale as: $2^0 = 1$.



110 Tossen

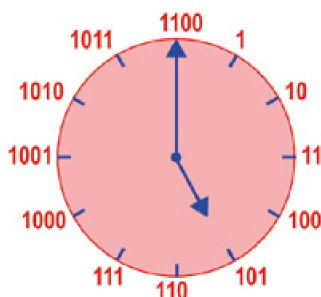
Voor de aanvang van een voetbalwedstrijd gooit de scheidsrechter een keer met een munt. Heb je er wel eens op gelet hoe handig hij dat doet?
Bij een keer tossen zijn er twee uitkomsten mogelijk K(op) of M(unt). Bij twee keer tossen zijn er vier mogelijke uitkomsten: KK, KM, MK, MM. Bij drie keer tossen zijn er acht mogelijke uitkomsten, bekijk het schema



Dit gaat zo door. De regel hierbij is: *n* keer tossen, geeft 2^n mogelijke uitkomstenrijtjes. Bij 0 keer tossen is er 1 uitkomst mogelijk, namelijk géén kop en ook géén munt. Vandaar $2^0 = 1$.

111 Het binaire talstelsel

Rekenmachientjes en computers rekenen van binnen met 'nullen' en 'enen'. Daarbij wordt gebruik gemaakt van het *binaire* (of *tweetallige*) stelsel om getallen uit te drukken.

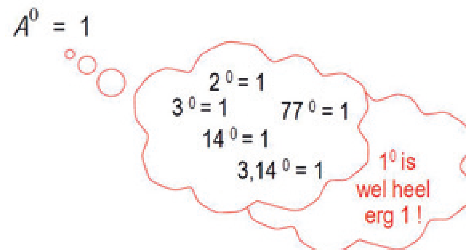


Zie de *binaire klok*. Die wijst **101** uur. Hoe zit dat ook al weer? Wel de cijfers (van rechts naar links) staan voor 1-heden, 2-tallen en 4-tallen.**101** $= 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 5$. Zoals het tientallig stelsel gebaseerd is op machten van 10, zo is het tweetallig stelsel dat op machten van 2. In beide gevallen lopen de machten van links naar rechts af. In plaats van $1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$ kun je ook schrijven $1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$. Als je een decimaal getal, bijvoorbeeld 1001, binair wilt schrijven, zoek je eerst de hoogste macht van 2 onder 1001. Dat is 512. Als je dat van 1001 aftrekt houd je 489 over. Dan doe je hetzelfde met 489, de hoogste macht is nu 256 en je houdt 233 over. En zo verder en er komt $1001 = 2^9 + 489 = 2^9 + 2^8 + 233 = \ldots =$ (reken maar na): $2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^0$.
Dus: 1001 = **1111101001**, maar **1001** = ...?

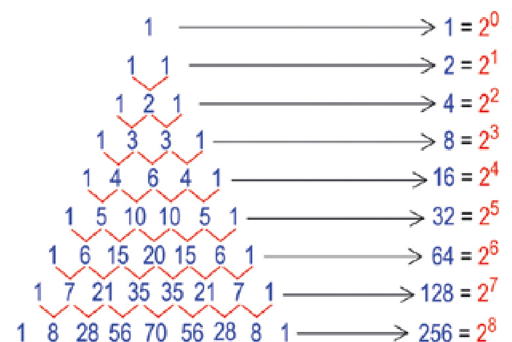
1000 Machtig vermenigvuldigen

A stelt een of ander positief getal voor.
$A^3 = A \times A \times A$, $A^4 = A \times A \times A \times A \rightarrow A^7 = A \times A \times A \times A \times A \times A \times A$

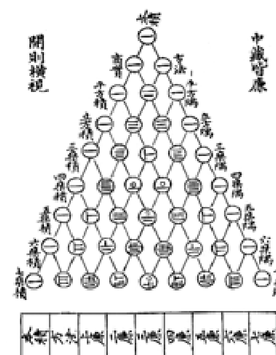
In het algemeen: $A^m \times A^n = A^{m+n}$. We willen dat deze regel ook klopt voor $n = 0$. Dus dat: $A^m \times A^0 = A^{m+0}$ ofwel



1001 De driehoek van Pascal



Wij noemen het de driehoek van Pascal (1623-1662), maar veel eerder, al in 1303 heeft de Chinees Chuh Shih Chieh de getallendriehoek ontdekt (zie het plaatje en je kunt meteen een paar Chinese cijfers leren!).



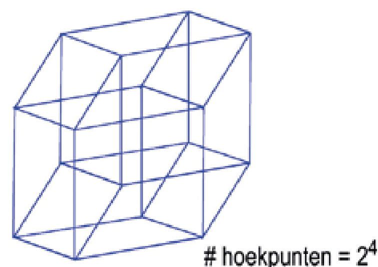
Hoe zit het ook alweer? Elk getal in de driehoek is de som van zijn twee bovenburen. Daaruit volgt dat als je de getallen in een horizontale rij bij elkaar optelt, er een macht van 2 uitkomt. Ga maar na: elk getal draagt twee keer bij aan de getallen in de rij daaronder en dat betekent dat de som van de getallen in een rij precies het dubbele is van de som in de rij erboven! En in de bovenste rij staat alleen 1, ook een macht van 2!

Meer sporen

Van jongs af aan ben ik fan geweest van meersporige benaderingen van wiskundige wetten en waarheden. Als leerling vond ik het al mooi als ik iets op verschillende manieren kon begrijpen en als leraar schroomde ik nooit om verschillende methoden of bewijzen naast elkaar te behandelen of met elkaar te vergelijken. Nu wil ik zeker niet aanbevelen om negen argumenten te geven waarom 2^0 gelijk zou moeten zijn 1. Ze zijn trouwens ook niet allemaal even sterk. Met name in het voorbeeld van het tossen is de 'lege worp' wel wat ver gezocht. Maar het idee dat het aantal mogelijke resultaten bij het muntwerpen een macht van 2 is, leek me de moeite waard. En ik wilde Magali vooral tonen dat er veel situaties zijn waarbij $2^0 = 1$ (of $a^0 = 1$) goed past. De twee voor de hand liggende aanpakken die mij bij het telefoongesprek het eerst te binnen schoten, zitten min of meer verstopt in het rijtje van negen. De klassieke aanpak in de schoolboeken: de regel 'vermenigvuldigen/delen van machten met hetzelfde grondtal' komt overeen met optellen/aftrekken van de exponenten, en dat willen we voortzetten, is een sterk voorbeeld van het permanentie-principe. In de tijd van de New Math, alweer zo'n 50 jaar geleden, werd wel aanbevolen om de afbeelding $k \to a^k$ (met k geheel, a positief reëel) als isomorfie van een optelgroep naar een vermenigvuldigingsgroep te zien, waarbij het neutrale element van de eerste (0 dus) afgebeeld op het neutrale element van de tweede (1). Die tijd ligt ver achter ons, maar in essentie is dit de achtergrond van $a^0 = 1$. In diezelfde periode - menig lezer zal het zich herinneren uit zijn schooltijd - was de lege verzameling een *hot issue*. Ook daarmee kon $2^0 = 1$ eenvoudig worden gerechtvaardigd. Dat het aantal deelverzamelingen van een verzameling met n elementen gelijk is aan 2^n stond in de meeste leerboeken, verklaard via combinatoriek. Je moet dan wel de twee triviale deelverzamelingen (dat wil zeggen: de verzameling zelf en de lege verzameling) meerekenen. Een verzameling met slechts één element (s*ingleton*) heeft alleen die twee triviale deelverzamelingen, dat rijmt met $2^1 = 2$. En ja, die lege verzameling heeft 'natuurlijk' maar één deelverzameling, zichzelf, vandaar $2^0 = 1$. Dit wilde ik mijn kleindochter toch maar niet aandoen.

Nog twee sporen

Dat er veel sporen naar $a^0 = 1$ leiden, betekent niet dat er direct een aantal daarvan moet worden gevolgd. Wel pleit ik er voor dat, op een nieuw moment waarbij een macht met exponent 0 zin heeft binnen een zekere (wiskundige) context, er opnieuw stil wordt gestaan bij het 'geniale' van die afspraak. Twee voorbeelden nog. De figuur hieronder is de projectie van een hyperkubus op het tekenvlak. Die figuur ontstaat door (de projectie van) een huis-tuin-en-keuken-kubus te verschuiven en de originele hoekpunten met de corresponderende beeldpunten te verbinden. Zo is te zien dat de 4-dimensionale kubus 16 (= 2^4) hoekpunten heeft.



Met deze hyperkubus kun je hetzelfde doen, dat wil zeggen verschuiven over een nieuwe richting en de corresponderende punten verbinden. Het resultaat is dan (de projectie van) een 5-dimensionale kubus die duidelijk 2^5 hoekpunten telt. Algemeen: een n-dimensionale kubus telt 2^n hoekpunten. Voor $n = 2$ hebben we te maken met een vierkant, voor $n = 1$ met een lijnsegment, voor $n = 0$ met één enkel punt en dit laatste is in overeenstemming met $2^0 = 1$! Als bij differentiaalrekening de regel voor de afgeleide van x^n ter sprake komt, kun je even stilstaan bij het geval $n = 1$. De afgeleide is de constante 1, dat rijmt met

$x^0 = 1$. $\frac{d}{dx}x^1 = 1 \cdot x^0$. Wacht even, in $x = 0$ is de afgeleide ook 1, dus dan ...

Ik probeer 0 tot de macht 0, op mijn grafische rekenmachine en die geeft, niet onverwacht, het antwoord 'error'. Mijn eerder in dit stukje vermelde lichte voorkeur voor de afspraak $0^0 = 1$ wordt door het apparaat niet gehonoreerd. Die voorkeur berust trouwens op het gedrag van de functie $x \to x^x$. Als je de grafiek laat maken door de grafische rekenmachine, dan zie je dat die heel dicht bij het punt (0,1) vertrekt. Met hulp van de analyse is dat ook te begrijpen:

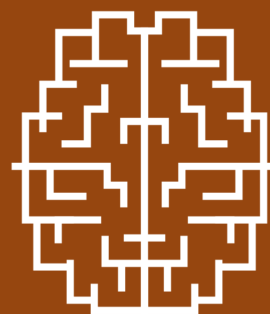
$$\lim_{x \to 0, x \to 0} x^x = \lim_{x \to 0, x \to 0} e^{x \ln(x)} = e^0 = 1.$$

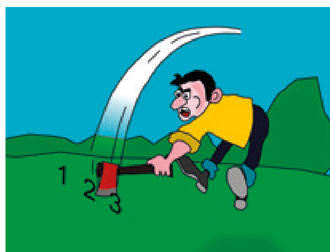
Ik herinner me dat ik in de bloeitijd van de *New Math* wel eens aan een hoogleraar wiskunde heb gevraagd of hij nul-tot-de-nulde gedefinieerd wilde zien. Antwoord: ja natuurlijk, dat is het aantal afbeeldingen van de lege verzameling op zichzelf, dus 1. Tja ...

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar en onderzoeker; ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

PUZZEL 91-3
RIJEN HAKKEN





figuur 1

Sommige rijen van opeenvolgende, gehele getallen van a tot en met b ($0 \leq a < b$) kunnen we in twee delen 'hakken', zodanig dat de som van elk deel gelijk is. We noemen dat *hakbare rijen*. Een eenvoudig voorbeeld is de rij 1, 2, 3, die we doorhakken tussen de 2 en de 3. Dan geldt: $1 + 2 = 3$ (zie figuur 1). Het verschil in lengte van de delen is 1. Let op: niet voor alle lengteverschillen bestaan er hakbare rijen.

Opgave 1
a. geef minstens twee andere hakbare rijen met een lengteverschil van 1;
b. geef een hakbare rij met een, door u te kiezen, groter lengteverschil.
Met behulp van wat algebra en de somfomule van een rekenkundige rij kunnen we (en wellicht ook uw leerlingen!) bepalen welke rijen hakbaar zijn. Dat hangt dan wel af van het lengteverschil tussen de twee delen waarin die rijen worden gehakt.

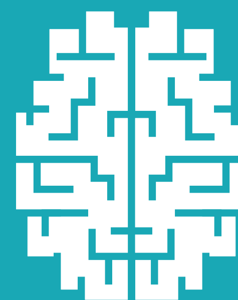
Opgave 2
a. bepaal een voorschrift voor hakbare rijen met een lengteverschil van 1;
b. bepaal een voorschrift voor hakbare rijen met een zelf te kiezen groter lengteverschil.
Een opvallende eigenschap: het blijkt zelfs (en is te bewijzen) dat alle hakbare rijen met een lengteverschil tussen de delen gelijk aan 1 netjes aansluiten op een andere hakbare rij met een lengteverschil van 1. En dat geldt ook voor rijen met een groter lengteverschil. Als u opgave 2 juist heeft beantwoord, heeft u dit wellicht al ontdekt.

Opgave 3
a. bewijs dat hakbare rijen met een lengteverschil van 1, netjes aansluiten op een andere hakbare rij met een lengteverschil van 1;
b. bewijs dit ook voor hakbare rijen met een lengteverschil van 2;
c. bewijs dit in het algemeen voor rijen met een lengteverschil van v (als er voor dit lengteverschil v hakbare rijen zijn).
In enkele bijzondere gevallen (het zijn er oneindig) geldt dat we een rij opeenvolgende gehele getallen a tot en met b ($0 \leq a < b$) in drie delen kunnen hakken, met sommen s, s, S, waarbij $S = 2s$. Dit zijn dus *dubbelhakbare rijen*.

Opgave 4
a. geef hiervan minstens één voorbeeld;
b. bepaal een formule waarmee u, eventueel met behulp van een (grafische) rekenmachine, dubbelhakbare rijen kunt opsporen.

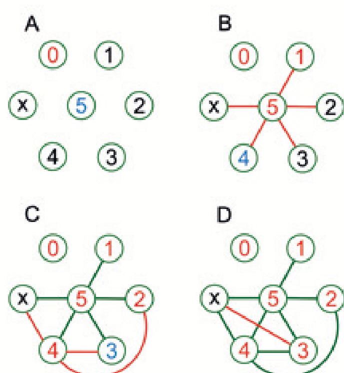
Een open vraag voor liefhebbers – Onderzoek of u een patroon kunt vinden (met bewijs) in de eigenschappen van een serie dubbelhakbare rijen. Daarmee hebt u dan een voorschrift in handen om zulke rijen te bepalen. Wij kennen wel een oneindige serie dubbelhakbare rijen met een vrij eenvoudig verband tussen het begingetal, de lengte van het eerste deel en de lengteverschillen tussen de drie delen. Hoewel het ernaar uitziet dat we daarmee ook alle dubbelhakbare rijen kunnen beschrijven hebben we die volledigheid (nog) niet kunnen bewijzen. Wie helpt?

Inzenden oplossingen
Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En u hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 5 januari 2016 binnen zijn.



Wobien Doyer
Lieke de Rooij

UITWERKING PUZZEL 91-1
GRADEN EN KNOPEN VAN EEN GRAAF



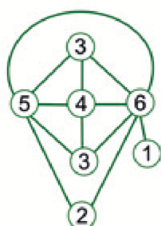
figuur 1

Deze puzzel ging over irreguliere en bijna irreguliere grafen. Een graaf is regulier als de graden van alle knopen in de graaf gelijk zijn, dus in elke knoop komen evenveel lijnen samen. Een volkomen irreguliere graaf definiëren we als een graaf waarvan alle graden verschillend zijn. In een enkelvoudige graaf is er tussen twee knopen hoogstens één verbinding, en de knopen zijn niet met zichzelf verbonden.

Opgave 1 – Toon aan dat enkelvoudige, irreguliere grafen niet bestaan. Alle inzenders hadden dit goed.
In een enkelvoudige graaf van n knopen kan de graad van een knoop hoogstens $n - 1$ zijn, en er moeten n verschillende graden zijn. De graadrij zou dus 0, 1, 2, 3, ..., $n - 1$ moeten zijn. De knoop met graad $n - 1$ is dan verbonden met alle andere knopen, maar de knoop met graad 0 is met geen enkele andere knoop verbonden. Dat kan natuurlijk niet.

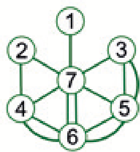
Een bijna irreguliere graaf is een graaf waarvan alle graden verschillend zijn, op één na.
Opgave 2 – Bepaal alle enkelvoudige bijna irreguliere grafen met zeven knopen. Er werden allerlei leuke, verschillende technieken gebruikt om dit uit te zoeken.
Uit opgave 1 volgt dat de graadrij ofwel uit de getallen 0 – 5 ofwel uit de getallen 1 – 6 bestaat, waarbij één graad dubbel voorkomt. Merk op dat van een oplossing voor getallen 0 tot en met 5 ook de complementaire graaf een oplossing is, die dan een graadrij heeft met getallen 1 tot en met 6 en omgekeerd. We hoeven dus alleen de grafen met graadrijen met de getallen 0 – 5 te onderzoeken, waarbij één graad dubbel voorkomt. We noemen de dubbel aanwezige graad x.
In figuur 1A ziet u de zeven knopen, met hun beoogde graad. De knoop met graad 0 mag niet met andere knopen verbonden worden en is daarom rood. De knoop met graad 5 kan maar op één manier met vijf andere (niet-rode) knopen verbonden worden, en is daarom blauw. In figuur 1B zijn die verbindingen aangebracht. Nu mogen de knopen met graad 1 en 5 nergens meer mee worden verbonden, dus die zijn ook rood. We gaan zo door: steeds zijn de nieuwe verbindingen en de knopen die al voldoende takken hebben rood, de niet-rode knoop met de hoogste graad is blauw, totdat er in 1D geen nieuwe verbindingen meer bij kunnen. We lezen af: $x = 3$. Er is dus één oplossing met graadrij 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5 (Zie figuur 1D) en één oplossing die daarvan het complement is (zie figuur 2). Jan Meerhof vond dit resultaat door een fraaie inductie over n, gebruik makend van de mogelijkheid een nul toe te voegen en het complement (verschillen met $n - 1$ en dan de rij omkeren) te nemen. Zijn graadrijen worden zo: 1, 1; 0, 1, 1; 1, 1, 2; 0, 1, 1, 2; 1, 2, 2, 3; 0, 1, 2, 2, 3; 1, 2, 2, 3, 4; ... ; 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5 en 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6.

We kijken nu naar niet-enkelvoudige grafen (multigrafen), maar zonder knopen die met zichzelf zijn verbonden. We gaan op zoek naar volkomen irreguliere grafen waarvan de graadrij een rij opvolgende getallen is. Omdat het de bedoeling was dat de grafen samenhangend waren beginnen die rijen bij $a > 0$.



figuur 2

Opgave 3a – Voor welke waarden van n bestaan zulke grafen en voor welke n niet?
Merk op dat het aantal verbindingen in een graaf gelijk is aan de helft van de som van de graadrij. Die som moet dus even zijn. De som van een rij van n opvolgende getallen beginnend bij a is $n(2a + n - 1)/2$. Als $n = 4k + 2$ dan is dat oneven voor elke a, en bestaan zulke grafen dus niet. Om aan te tonen dat het in alle andere gevallen wel lukt, vonden de inzenders allerlei creatieve oplossingen. We geven hier één voorbeeld.
Voor $n = 4k$ kunnen we de volgende (lineaire) graaf maken; de zwarte getallen zijn de graden van de knopen, de kleinere rode het aantal verbindingen: $1\ ^{1}\ 3\ ^{2}\ 5\ ^{3}\ 7\ ^{4} \ldots ^{2k-1}\ (4k - 1)\ ^{2k}\ 4k\ ^{2k}\ (4k - 2)\ ^{2k-2}\ (4k - 4)\ ^{2k-2} \ldots ^{4}\ 8\ ^{4}\ 6\ ^{2}\ 4\ ^{2}\ 2$.

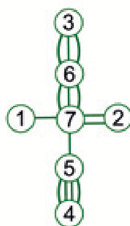


figuur 3



figuur 4

Voor $n = 4k - 1$ kunnen we uit bovenstaande graaf eenvoudig de knoop met graad $4k$ er tussenuit halen, en de knopen met graden $4k - 1$ en $4k - 2$ met $2k$ lijnen verbinden.
Voor $n = 4k + 1$ voegen we vóór de 1 een losse knoop met graad 0 toe. We hebben dan een volkomen irreguliere graaf met graadrij 0 tot en met $4k$, maar geen samenhangende. Door de knopen met graad 0 en 1 te verbinden met $4k + 1$ takken krijgen we een samenhangende volkomen irreguliere graaf, met graden van 2 tot $4k + 2$. De inzenders vonden allerlei verschillende algemene oplossingen voor $n = 4k$, $n = 4k - 1$ en $n = 4k + 1$. Dus behalve voor $n = 4k + 2$ bestaan zulke grafen.



figuur 5

Opgave 3b – Gevraagd wordt naar drie zulke grafen met $n = 7$, één met cykels, één lineair en één zonder cykels maar met zijtakken. Ook dit leverde een groot aantal verschillende oplossingen op waar wij een keuze uit maakten, zie figuur 3, 4 en 5.

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na puzzel 91-1 is:

Naam	Punten
R. Stolwijk	205
G. Bouwhuis	176
F. Göbel	154
H. Bakker	139
K. Vugs	137
J. Meerhof	129
J. Verbakel	128
H. Klein	103
L. Pos	78
H. Linders	74

We feliciteren Ruud Stolwijk van harte met de ladderprijs.

VERSCHENEN

WISKUNDE IN JE VINGERS



Ondertitel: Een oppepcursus voor liefhebbers en andere freaks
Auteurs: Ronald Meester en Joost Hulshof
Uitgever: VU University Press, Amsterdam (2015)
ISBN: 978-90-8659-715-4
Prijs: € 29,95 (182 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

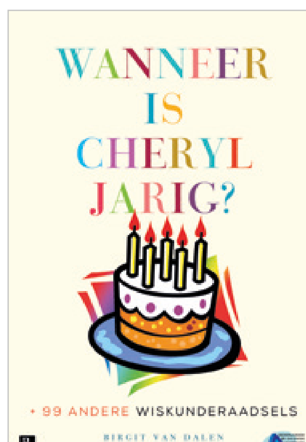
Dit boek is voor iedereen die wat met wiskunde te maken heeft, of wil hebben. Bijvoorbeeld voor docenten wiskunde in het havo en vwo, voor hun leerlingen in de bovenbouw, maar ook voor liefhebbers die al jaren zoeken naar een toegankelijk, onderhoudend en inspirerend verhaal over wiskunde. De auteurs laten zich graag leiden door hun gezonde verstand en proberen de vragen die op natuurlijke wijze opkomen met minimale middelen te beantwoorden. Dit levert een ongewoon leesbaar boek over wiskunde op. Wat de lezer nodig heeft is niet meer dan nieuwsgierigheid, gevoel voor humor, een pen en blanco papier en, op enige afstand, de hulpmiddelen van deze tijd.

BOEKBESPREKING

WANNEER IS CHERYL JARIG?



Jan van de Craats



Ondertitel: + 99 andere wiskunderaadsels
Auteur: Birgit van Dalen en Quintijn Puite
Uitgever: Bertram + de Leeuw Uitgevers BV
ISBN: 9789-46-1561-96-1
Prijs: € 14,95 (216 pagina's; paperback)

Inleiding

In april 2015 ging een raadsel de wereld rond dat een tv-presentator uit Singapore op *Facebook* had gezet: Wanneer is Cheryl jarig? Gegeven was dat Cheryl op één van de volgende data jarig is: 15, 16 en 19 mei, 17 en 18 juni, 14 en 16 juli en 14, 15 en 17 augustus. Albert krijgt de maand te horen waarin ze jarig is en Bernard de dag (maar niet de maand). Dan zegt Albert: 'Ik weet niet wanneer Cheryl jarig is, maar ik weet wél dat Bernard het ook niet weet.' Daarop reageert Bernard: 'Eerst wist ik niet wanneer Cheryl jarig is, maar nu weet ik het wel!' Vervolgens concludeert Albert: 'Dan weet ik het ook!' Weet jij het nu ook?

Op 14 april haalde Cheryl zelfs *De wereld draait door.* Quintijn Puite van de Nederlandse Wiskunde Olympiade had drie slimme scholieren, Mike Daas (17), Levi van der Pol (13) en Dirk van Bree (17) opgetrommeld om licht in de duisternis te brengen. Ze kweten zich uitstekend van hun taak. Dirk nam het raadsel van Cheryl voor zijn rekening en vervolgens loste Levi een puzzel op over rode en witte wijn, waarna Mike nog snel een sommetje kraakte over de leeftijden van drie kinderen. Matthijs van Nieuwkerk en tafelgast Adriaan van Dis waren diep onder de indruk: je kunt het terugzien op *Uitzending gemist.*

Birgit van Dalen en Quintijn Puite hebben naar aanleiding van dat succes een boek samengesteld met honderd wiskunderaadsels van dit kaliber. De opgaven zijn in gewonemensentaal geformuleerd en bijna allemaal lijken ze op het eerste gezicht onoplosbaar. Maar met logisch redeneren kun je er toch uitkomen. Dat geeft veel plezier als het lukt. De puzzels gaan over munten, glazen, dozen, sokken, knikkers, schatkisten, kabouters met puntmutsen, ridders, schurken, gevangenen en nog veel meer. Sommige raadsels zijn klassiek, andere zijn variaties op bekende thema's, en weer andere zijn nieuw. Enkele opgaven kostten zelfs mij als routinier toch nog enige moeite. Bijvoorbeeld de volgende:

Acht leerlingen hebben een toets gemaakt. Geen twee leerlingen hebben hetzelfde aantal vragen goed beantwoord. Elke vraag was door hoogstens drie leerlingen goed beantwoord. Wat is het kleinste aantal vragen dat de toets kan hebben?

Het volgende raadsel zal ook menigeen hoofdbrekens kosten:

In een rij van tien bomen zit in elke boom precies één spreeuw. Op het moment dat een spreeuw een willekeurig aantal bomen naar rechts vliegt, vliegt een andere spreeuw precies evenveel bomen naar links. Kunnen alle spreeuwen uiteindelijk in één boom komen?

Of neem de snoepjespuzzel:

Jan is jarig en trakteert. Hij heeft 85 snoepjes en verdeelt ze eerlijk onder zijn vrienden. Hij deelt zoveel mogelijk snoepjes uit, en dat zijn er in elk geval meer dan één per persoon. Na het uitdelen houdt Jan er nog acht over. Hoeveel vrienden waren er op Jans verjaardag?

Niet zo moeilijk, die laatste, maar je moet wel nauwkeurig lezen. De volgende puzzel is lastiger:

Carry heeft zes kaarten. Op elke kaart staat een geheel getal geschreven (de getallen hoeven niet allemaal verschillend te zijn). Zij kiest drie kaarten en telt de getallen op die kaarten bij elkaar op. Zij doet dit voor alle 20 mogelijke combinaties van drie kaarten. Tien maal krijgt ze als uitkomst 16, en tien maal als uitkomst 18. Wat is het kleinste getal dat op de kaarten voorkomt?

Het leuke van al die raadsels is dat er altijd wel ergens een element van verrassing in zit. Op het eerste gezicht lijken er bijvoorbeeld gegevens te ontbreken. Soms vraag je je in het begin af hoe het überhaupt mogelijk is om het antwoord te vinden, bijvoorbeeld bij het raadsel van Cheryls verjaardag. Maar los daarvan is het natuurlijk zo, dat het nooit om 'realistische' problemen gaat. Wie interesseert het nu wanneer Cheryl jarig is? Je kunt het haar toch gewoon vragen? Toch hebben hele volksstammen zich erin verdiept (en meestal tevergeefs). Het afleiden van het goede antwoord uit schaarse gegevens is gewoon *fun*.

Wat helpt bij alle raadsels is dat je altijd weet dat er precies één goed antwoord is. Bovendien geven Birgit en Quintijn bij elke opgave onderaan de bladzijde een hint. Eigenlijk vind ik het jammer dat die hints niet ondersteboven of in spiegelschrift zijn afgedrukt. Zoals ze er nu staan, is de verleiding wel erg groot om er (te) snel naar te kijken. De volledige uitwerking van elke som staat op de volgende bladzijde. Dat is minder bezwaarlijk, want daarvoor moet je eerst de bladzijde omslaan. De auteurs noemen hun puzzels wiskunderaadsels, maar nergens komt in de vraagstelling echt wiskunde om de hoek kijken. Geen formules, functies of vergelijkingen. Soms een simpele figuur met rechthoeken erin, maar daar blijft het bij. De illustraties, bij elke opgave een, zijn trouwens erg leuk: complimenten voor tekenaar Ad van den Broek! Wél is het zo dat je bij het zoeken naar de oplossing soms wiskunde zou kunnen gebruiken, bijvoorbeeld als je de gegevens kunt vertalen in variabelen en vergelijkingen. De oplossing is dan meestal snel gevonden. Maar in de uitwerkingen worden zulke wiskundige kortsluitingen stelselmatig vermeden: in het boek komen geen formules voor. Is het dan niet pretentieus om over 'wiskunderaadsels' te spreken, zoals in de ondertitel staat? Ik denk het niet. Het is onmiskenbaar zo, dat leerlingen met aanleg voor wiskunde goed zijn in het oplossen van zulke puzzels. Niet voor niets zijn veel van de opgaven direct of indirect afkomstig van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en de Kangoeroe Wiskundewedstrijd. Net als bij die wedstrijden zijn de puzzels uit dit boek daarom bij uitstek geschikt om wiskundetalent op te sporen en te stimuleren. En ook hierbij geldt: oefening baart kunst. Als je maar veel van dit soort opgaven oplost, wordt je er vanzelf beter in.
Maar is er ook een 'hoger doel' mee gediend? Hoger dan het opsporen en stimuleren van wiskundig talent - wat op zichzelf natuurlijk al een fantastisch hoger doel is? Leer je er bijvoorbeeld beter door te denken (wat dat ook moge betekenen)? Ik waag het te betwijfelen.
Maar laat dat je als wiskundeleraar er vooral niet van weerhouden om dit boek aan te schaffen. Je zult er zeker veel plezier aan beleven, en veel van je leerlingen ongetwijfeld ook. Bovendien lenen de opgaven zich voor allerlei variaties, dus je creativiteit zal er vast en zeker ook door worden gestimuleerd. Kortom: van harte aanbevolen!

Over de recensent

Jan van de Craats is emeritus hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. Hij was jarenlang medeorganisator van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en trainer van het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade.
E-mailadres: *janvandecraats@casema.nl*

BOEKBESPREKING

EEN PASSIE VOOR SYMMETRIE



Chris van der Heijden



Auteur: Jan van de Craats
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2014), deel 78
ISBN: 978-90-5041-143-1 (106 pagina's; paperback)
Prijs: € 20,00

Inleiding

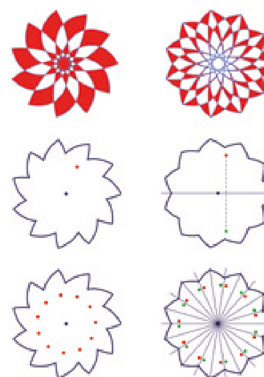
'Ik heb een passie voor symmetrie.' Zo begint de inleiding van het hier te bespreken boek van Jan van de Craats. Naast de inleiding staat een foto van het ingangspaneel van de kapel van de Cappella Palatina in Palermo op Sicilië. Dit paneel 'toont prachtige mozaïekpatronen die allerlei vormen van symmetrie laten zien.' En wie verder bladert, ziet een scala van foto's uit verschillende culturen van op symmetrie gebaseerde tegelpatronen Duidelijk blijkt hieruit dat van de Craats niet de bedoeling heeft om een puur wiskundig verhaal over symmetrie te houden, maar dat hij schrijft voor een breder publiek. Zijn belangrijkste inspiratiebron voor *Een passie voor symmetrie* is het prachtig geïllustreerde boek *The Symmetries of Things* van John H Conway e.a. Ook moeten we aannemen dat van de Craats oog heeft voor de schoonheid van de ornamentele kunstvorm en de volledigheid van de getoonde soorten symmetrie uit vroegere culturen. Want symmetrie is meer dan spiegelsymmetrie schrijft hij.

Soorten symmetrie

Veertig soorten symmetriepatronen worden behandeld: twee rozetpatronen, zeven platonische bolpatronen, zeven parametrische bolpatronen, zeven strookpatronen en zeventien behangpatronen. De schrijver doet dit in ook voor niet wiskundigen begrijpelijke taal en zonder formules. Nieuwe begrippen worden aan de hand van voorbeelden ingevoerd en achter in het boek in een verklarende woordenlijst samengevat. Daar staat ook een overzicht van de symmetriepatronen met hun bijbehorende codenamen. Om de soorten symmetrie van elkaar te onderscheiden zijn in de historie veel coderingen bedacht waaruit de symmetrie-eigenschappen af te lezen zijn. Van de Craats gebruikt een door hem licht gewijzigde vorm van de notatie van Conway. Het hoofddoel van het boek is volgens hem om het verband te leren inzien tussen het soort symmetrie en zijn codenaam. Het begrip chiraliteit speelt hierbij een belangrijke rol.

Chiraliteit en Symmetrie

Chiraliteit wordt als volgt gedefinieerd: Een voorwerp of patroon heet chiraal als het verschilt van zijn spiegelbeeld zoals een linkerhand verschilt van zijn rechterhand. Verrassend voor niet-wiskundigen is de definitie van symmetrie: Een symmetrie van een rozetpatroon, voorwerp, bolpatroon, strookpatroon of behangpatroon is een handeling die je ermee achter een gordijn kunt uitvoeren zonder dat de toeschouwer na afloop kan zien dat er iets is veranderd. Kort gezegd: Symmetrie is een handeling zonder zichtbare gevolgen. Het verband tussen chiraliteit en symmetrie wordt in het boek op didactisch aansprekende wijze uitgelegd aan de hand van twee rozetpatronen. Hiervoor is in de klas wel een overheadprojector of beamer nodig.



figuur 1

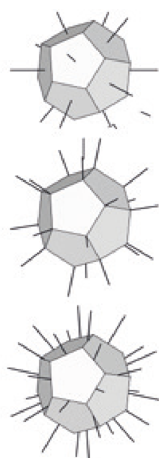
Het linker rozetpatroon in figuur 1 is chiraal, want het verschilt van zijn spiegelbeeld. Het rechter patroon in figuur 1 is achiraal want het verschilt niet van zijn spiegelbeeld. Een vereenvoudigde kopie van het chirale rozetpatroon, voorzien van één rode stip kan op elf manieren passend gelegd worden op het originele patroon; dit zijn elf handelingen. Dit rozetpatroon heeft daarom elf draaisymmetrieën. Het centrum van deze symmetrieën is het vaste middelpunt van het patroon. De draaiingshoeken zijn een geheel veelvoud van 360°/11. De elf plaatsen waar de rode stip terecht komt vormen

samen een discrete puntenbaan. Dit rozetpatroon heeft daarom een elfvoudig draaicentrum. De draai-symmetrieën samen vormen een discrete symmetriegroep. De codenaam van dit rozetpatroon is [g(11)]. Er wordt in de codering geen verschil gemaakt tussen een linksom of een rechtsom draaiend patroon. Het getoonde stervormige achirale rozetpatroon heeft elf spiegelassen. Dit patroon heeft naast elf draaisymmetrieën, ook nog elf keer een spiegelsymmetrie die als volgt 'zichtbaar' gemaakt worden.
Zet een rode stip op de kopie, niet op een symmetrieas. Spiegel deze stip in een van de spiegelassen en geef het spiegelbeeld een groene kleur. De kopie van het patroon kan weer op elf manieren passend gelegd worden op het originele patroon. Er ontstaan nu echter twee puntenbanen, een baan met elf rode punten en een baan met elf groene punten. De draaisymmetrieën en de spiegelsymmetrieën samen vormen ook een symmetriegroep. De code van dit rozetpatroon is [s(11)]. Het totale aantal symmetrieën is nu gelijk is aan $2 \times 11 = 22$. Er zijn in principe slechts twee soorten rozetpatronen, het chirale patroon met codenaam [g(*n*)] en het niet-chirale rozetpatroon met codenaam [s(*n*)]. In dit voorbeeld is $n = 11$, niet toevallig een priemgetal.

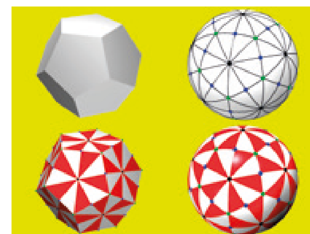
De centrale rol van de bol

Rozetpatronen zijn tweedimensionaal. De symmetrie-eigenschappen van driedimensionale voorwerpen zijn gecompliceerder, maar van de Craats laat zien dat deze vereenvoudigd kunnen worden tot de symmetrie-eigenschappen van een patroon op een bol, dus ook op een tweedimensionaal oppervlak. Interessant is de didactische aanpak. De lezer wordt uitgedaagd om in hoofdstuk 2 zonder tussenkomst van de corresponderende bolpatronen het verband te zien tussen de codenaam van een voorwerp en zijn symmetrie-eigenschappen aan de hand van 61 door van de Craats zelf ontworpen en soms in kleurendruk uitgevoerde plaatjes. En pas als dit niet lukt een blik te werpen in hoofdstuk 3, het hoofdstuk *Bolpatronen*.

Een aansprekend voorbeeld in hoofdstuk 2 is het platonische veelvlak dodecaëder. Deze heeft 120 symmetrieën, zie figuur 2. De dodecaëder heeft twaalf zijvlakken, twintig hoekpunten en dertig ribben. Alle draaiingsassen


figuur 2

gaan door het vaste middelpunt van de dodecaëder. Zes draaiingsassen assen gaan door de middelpunten van diametraal tegenover elkaar liggende zijvlakken, tien draaiingsassen door diametraal tegenover elkaar liggende hoekpunten en vijftien draaiingsassen gaan door de middens van diametraal tegenover elkaar liggende ribben. Wordt de triviale symmetrie 'niets doen' tot het laatst bewaard dan is het totale aantal niet triviale draaisymmetrieën 6 □ (5 – 1) + 10 □ (3 – 1) + 15 □ (2-1) = 59, d.w.z. 60 draaisymmetrieën inclusief de handeling 'niets doen'.


figuur 3

Er blijken vijftien spiegelvlakken te zijn. Een uitstekende training in ruimtelijk voorstellingsvermogen', schrijft de auteur. Als je een draaisymmetrie laat volgen door een spiegeling levert dit nog eens 60 symmetrieën op. De dodecaëder heeft dus totaal 120 symmetrieën. In figuur 3 zien we de omschreven bol van de dodecaëder. De middelpunten van bol en dodecaëder vallen samen. De lijnen van het bolpatroon zijn de snijlijnen (grote cirkels) van de bol met de spiegelvlakken van de bol die corresponderen met de spiegelvlakken van de dodecaëder. Deze grote cirkels worden spiegelcirkels genoemd. De snijpunten van de spiegelcirkels zijn draaicentra van de draaisymmetrieën. Zo zijn er vijfvoudige, drievoudige en tweevoudige draaicentra. Door slimme inkleuring van het patroon worden de spiegelsymmetrieën uitgesloten en blijven de 60 draaisymmetrieën over. De ingekleurde versie toont het chirale platonische bolpatroon met codenaam [g(5,3,2)]. De niet ingekleurde versie is het achirale platonische bolpatroon met codenaam [s(5,3,2)].

Behangpatronen

Bij behangpatronen zijn er translaties in meerdere richtingen. Er zijn zeventien verschillende soorten symmetrische behangpatronen. In 1924 werd dit voor het eerst ontdekt en bewezen door George Pólya, naar men dacht. Maar buiten Rusland was toen nog niet bekend dat de Russische kristallograaf Evgraf Stepanovitsj dit al in 1891 uitgezocht en bewezen had. Alle patronen met hun codenamen worden in schemavorm getoond.
De spiegelassen zijn getrokken en de glijspiegelassen gestreept. De equivalente centra, dat wil zeggen de centra van verschillende soorten draai-symmetrie, worden onderscheiden door verschillend gekleurde stippen. Ter oefening voor de lezer worden alle patronen ook nog eens gegeven in willekeurige volgorde, maar dan zonder spiegelassen, centra en codenamen. In figuur 4 is een



figuur 4

voorbeeld gegeven. Dit betreft een muurtegelpatroon uit een klooster van de Derwisjen in Caïro uit de zeventiende eeuw. Dit patroon is achiraal, alle centra liggen op de spiegelassen, er zijn twee soorten viervoudige equivalente draaicentra aangegeven met gele en blauwe stippen en een soort tweevoudige equivalente draaicentra met rode stippen. De codenaam is [s(4,4,2)].

Conclusie

Wie de inhoud van dit boek bestudeert maakt kennis met alle eindige soorten symmetrie in het platte vlak en de ruimte. Het is een afgerond geheel. De tekst is ook voor niet-wiskundigen toegankelijk. Veel in kleur uitgevoerde plaatjes met toelichting spreken voor zich om de codenaam van een patroonsoort of symmetrie-eigenschap te begrijpen. De foto's van tegelpatronen, wandversieringen en mozaïeken maken het boek tot een levendig geheel. Het kan dienen als een gids voor de kunstliefhebber voor een reis naar Andalusië, Marokko, Egypte, Turkije, Sicilië of Iran.
Het boek is toegesneden om zelfstandig door te werken. Het bevat onderzoeksvragen en recepten om de codenamen te bepalen. De tekst laat voldoende ruimte voor het stellen van vragen: Wat is een groep? Waarom spelen de priemgetallen 2, 3 en 5 zo'n prominente rol in de codenamen? Zijn dit alle mogelijke soorten symmetrie? Uitmondend in de vraag: Moet dit niet bewezen worden? Het boek is daarom geschikt voor de bovenbouw van vwo/havo, in 't bijzonder voor de leerling met wiskunde in het studieprofiel. Maar ook studenten wiskunde in de lerarenopleiding kunnen er hun voordeel mee doen. Want dit boek bestrijkt zowel de meetkunde (isometrieën) als de algebra (groepentheorie).

Op de website vindt u een uitgebreidere versie van deze recensie

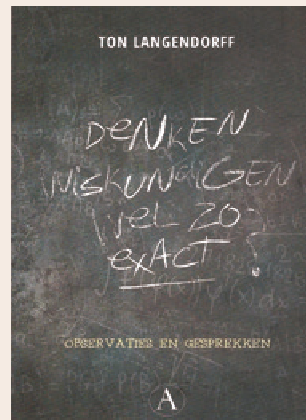
 *vakbladeuclides.nl/913vdheijden*

Over de recensent

Drs. Chris van der Heijden was voor zijn pensionering conrector en docent wiskunde aan de voormalige CSG Blaise Pascal te Spijkenisse.
E-mailadres: *chris-van-der-heijden@wxs.nl*

VERSCHENEN

DENKEN WISKUNDIGEN WEL ZO EXACT?



Ondertitel: Observaties en gesprekken
Auteur: Ton Langendorff
Uitgever: Uitgeverij Athenaeum, Amsterdam (2015)
ISBN: 978 90 253 0767 7 (288 pagina's; paperback)
ISBN: 978 90 253 0768 4 (*e-book*)
Prijs: € 17,50 (*e-book* € 11,99)

Uit het persbericht van de uitgever

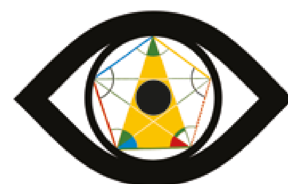
Dit boek gaat over de warrige wegen die wiskundigen in hun gedachten afleggen. Die wegen zijn niet zo exact als de formules suggereren. Ze zijn geplaveid met gepieker, tegenstrijdigheden, doodlopende steegjes, wanhoop, verwarring. Wiskundigen maken in hun denken creatief gebruik van intuïtie, analogieën en metaforen, ambiguïteit, paradoxen, dromen, plotselinge invallen. De logica daarvan is ver te zoeken, het gevoel overheerst. Het gevoel als dat van een kunstenaar die zoekend te werk gaat. Dat zoeken is wiskunde. Wiskundigen presenteren ons uitsluitend het eindresultaat, de keurige kant-en-klare formules waar de meesten van ons niets van snappen. Wat eraan voorafging, daarover horen we niets. De schoonheid van de wiskunde is het eindproduct – dit boek laat de 'weg ernaartoe' zien. Om die te begrijpen hoef je geen wiskunde te kennen. Ton Langendorff voerde gesprekken met dertien hoogleraren. Elk hoofdstuk wordt (zonder formules) ingeleid en geïllustreerd met hun praktijkervaringen. Ton Langendorff studeerde Culturele Antropologie. Na zijn pensioen is hij manager van het wiskunde-instituut van de drie technische universiteiten.

GETUIGEN

REKENHULPMIDDELEN

Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.





figuur 1 Rekenblokjes in rekendoosjes - collectie auteur

Hulpmiddelen bij het rekenen zijn zo oud als het rekenen zelf. Rekenhulpmiddelen die bewust om didactische redenen werden ingezet in de rekenles zijn echter veel minder oud. Rond 1800 kwam er een kleine industrie op van verschillende vormen en objecten die kinderen konden helpen om te leren rekenen. Een van de meest populaire rekenhulpmiddelen waren de zogenaamde rekendoosjes. Die doosjes bestonden er in tal van uitvoeringen. In figuur 1 ziet u een tweetal uit goedkoop hout vervaardigde laat negentiende-eeuwse exemplaren, met de blokjes uitgestort over een tafelblad. Het aardige aan de rekenblokjes was dat docenten ze zowel konden gebruiken in het onderwijs in het tellen en groeperen, als in het onderwijs van het metrieke stelsel dat in Nederland sinds 1815 in gebruik was. Figuur 2 toont een set rekenstaafjes die begin negentiende eeuw bij uitgeverij Van Cleef te verkrijgen waren. Het idee van de rekenstaafjes was op dat moment al bijna twee eeuwen oud, en ze waren in gebruik bij mensen die veel rekenwerk hadden te verrichten. Om ze ook voor het onderwijs beschikbaar te stellen was nieuw. Hoewel ze in de praktijk wel succesvol waren, vond het gebruik van rekenstaafjes in het onderwijs weinig weerklank. Dat had te maken met de doelen die onderwijzers zich op dat moment stelden. Rekenonderwijs had twee belangrijke elementen bij te dragen aan de opleiding van jonge kinderen. Op de eerste plaats zouden kinderen er nauwkeurig en vlijtig van leren werken. Op de tweede plaats zou goed rekenonderwijs tevens het denken bevorderen, althans: met goed rekenonderwijs was het mogelijk om de betere leerlingen in de klas te herkennen. Voor dat eerste doel zouden rekenhulpmiddelen als stimulans veel goeds kunnen verrichten. Het tweede doel werd echter op een zeer bepaalde manier geïnterpreteerd.

In de achttiende eeuw was het doel van het rekenonderwijs voornamelijk geweest om de kinderen vlot en foutloos met de Arabische cijfers te leren omgaan. In het nieuwe rekenonderwijs van rond 1800 vonden onderwijzers het ook van belang dat kinderen begrepen dat die cijfers alleen maar een hulpmiddel waren om getallen op te schrijven. Idealiter begrepen kinderen dat het om hoeveelheden of meetbare zaken ging, waar men mee rekende.

In een aantal rekenboeken werd 'getal' gedefinieerd als de naam van het aantal eenheden dat men ergens in aantreft – of woorden van die strekking. Optellen was dan het bij elkaar voegen van groepjes eenheden; aftrekken het weghalen van groepjes eenheden. Vermenigvuldigen was het bijeenvoegen van een aantal gelijke groepjes, een herhaalde optelling. De visuele ondersteuning van de rekenblokjes was daarbij een voordeel, omdat die het beeld van herhaalde optelling kon versterken. De rekenstaafjes, daarentegen, werkten dat beeld tegen. Omdat men ervan overtuigd was dat in dat beeld De Werkelijkheid besloten lag – getallen waren echt de namen van die groepjes eenheden – was het belangrijk dat beeld te versterken. Vervolgens was het voor kinderen uiteraard nog steeds



figuur 2 Kartonnen rekenstaafjes in een doosje als schoolmateriaal. Vroeg-19e-eeuwse uitgave van J. van Cleef. Museum Boerhaave, Leiden

belangrijk om vlot te leren rekenen en bijvoorbeeld de tafels van vermenigvuldiging uit het hoofd te leren. De oefening van het geheugen werd immers beschouwd als een belangrijk doel van het onderwijs. Ook daarin vervulden de rekenstaafjes dus geen rol. De rekenblokjes waren dan nog niet uitgespeeld, want ze konden een rol spelen in het visualiseren van de rekenregels waar leerlingen mee te maken kregen bij het gebruik van het metrieke stelsel. De blokjes konden zowel op hun lengte-, oppervlakte- als inhoudseigenschappen worden gebruikt. Leerlingen konden door een vierkant van 3 bij 3 blokjes te leggen bijvoorbeeld ervaren dat de oppervlakte uit 9 vierkantjes bestond. Daarmee werd inzicht bevorderd in het gegeven dat er weliswaar maar 10 decimeters in een meter gingen, maar wel 100 vierkante dm in een vierkante meter en maar liefst 1000 kubieke dm in een kubieke meter. Ook inzicht in dit soort eigenschappen vonden veel onderwijzers de moeite waard, omdat het behoorde tot de essentiële eigenschappen die de schepper in de wereld had gelegd.

In de loop van de negentiende eeuw verdween de geschetste visie over het talstelsel en de meetkunde naar de achtergrond en daar kwamen meer utilitaristische doelen voor in de plaats. Voor de leerlingen en hun ouders werd er overigens ook een meer pragmatisch doel bereikt met het rekenonderwijs. Kinderen die konden rekenen hadden meer mogelijkheden op de arbeidsmarkt. Dat doel won in de loop van de negentiende eeuw aan relevantie.
Toen begin negentiende eeuw rekenhulpmiddelen in het onderwijs als visuele ondersteuning werden gewaardeerd, kregen onderwijzers ook een afkeer van rekenhulpmiddelen die het inzicht in 'het wezen der getallen' niet stimuleerden. De rekendoosjes vervulden een dubbele functie. Niet alleen konden ze helpen bij het tellen, en daarmee het aanvankelijk rekenen ondersteunen. Het groeperen van blokjes kon tevens helpen om het talstelsel te doorgronden en ze waren ook geschikt om inzicht te verschaffen in het leren hanteren van het metrieke stelsel. De kartonnen rekenstaafjes waren fraai, maar zullen niet heel gretig aftrek hebben gevonden. Zo ziet men: aanschouwelijk gebruik van rekenhulpmiddelen in het onderwijs is aan smaak onderhevig. Eventueel kan 'smaak' hier ook worden gesubstitueerd door 'didactische doelen' – al is de betekenisverandering die daarmee wordt bereikt uitermate subtiel.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

WISKUNDIG DENKEN: *A WAY OF LIFE*

Marieke Bor
Paul Drijvers

Het activeren van wiskundig denken daagt leerlingen uit, maar hoeft geen extra lestijd te kosten. Dat is een van de conclusies van het praktijkgericht onderzoek naar wiskundig denken. Marieke Bor en Paul Drijvers vatten de opbrengst van het onderzoek samen tot tips om van wiskundig denken a *way of life* te maken.

Het onderzoek

Het schooljaar 2014-2015 stond voor zes docenten in het teken van wiskundig denken. Samen met onderzoekers van het Freudenthal Instituut (Universiteit Utrecht) en het Cito werkten zij aan het onderzoek *Wiskundige denkactiviteit in praktijk*.[1] Anne van Streun en Marian Kollenveld stonden het team bij met advies. Met elkaar hebben we nagedacht over wat wiskundig denken is[2], welke opgaven daar goed bij passen en wat de docent kan doen om het denken in de klas te bevorderen.
De docenten, afkomstig van drie scholen, hebben met de onderzoekers eerst tips gezocht in de literatuur. Deze tips hadden betrekking op het (her)ontwerpen van opgaven en het stimuleren van wiskundig denken in de les. We zijn hiermee aan de slag gegaan om een aantal bruikbare opgaven te ontwerpen voor klas 3 van havo en vwo en de eigen lessen in deze klassen *denkactiever* te maken. Regelmatig spraken docenten met elkaar af, in tweetallen of met de hele groep, om samen lessen voor te bereiden of bij elkaar in de klas te kijken. Observaties en zelfreflecties zorgden ervoor dat we kritisch naar de lessen en de gebruikte opgaven hebben gekeken. Verbeterpuntjes werden onthouden voor volgende lessen en de opgave werd daar waar nodig aangepast en nogmaals getest door een andere docent.

Denkactiverende opgaven

We hebben met elkaar nagedacht over opgaven die leerlingen uitdagen tot wiskundig denken. De docenten stelden dat de opgaven moesten passen binnen het curriculum, omdat er anders geen tijd voor zou zijn. Het boek vormde dus het uitgangspunt voor het ontwikkelen van denkactiverende opgaven. De literatuur gaf handvatten om opgaven aan te passen zodat deze meer uitdagen tot wiskundig denken. Denk aan het weglaten van deelvragen[3], het benadrukken van hetgeen dat interessant is, bijvoorbeeld een conflict tussen intuïtieve kennis en

wiskundige kennis[4] of het stellen van waaromvragen.[5] In totaal heeft het docententeam 23 opgaven ontwikkeld en deze minimaal één keer getest en verbeterd (zie bijvoorbeeld de opgave over steilheid in kader 1). Populair bij ons team was het starten met een opgave uit het einde van de paragraaf of het hoofdstuk. Veel boeken zijn ontworpen zodat leerlingen zich stap voor stap zelfstandig door theorie en opgaven heen kunnen werken. Wanneer je hen zelf deze stappen laat bedenken, eventueel in groepsverband, dan wordt het wiskundig denken meer geactiveerd. Vervolgens kun je leerlingen laten oefenen met de stof, maar hoeven zij niet meer alle opgaven te maken, wat weer tijdwinst oplevert.

Kader 1: Een voorbeeldopgave



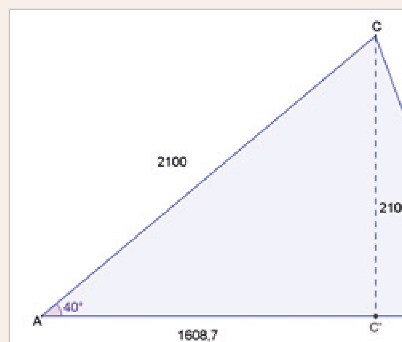
Laat leerlingen in groepjes met elkaar nadenken over de vraag: Wanneer is een weg twee keer zo steil? Discussieer met de hele klas over de verschillende mogelijkheden. Een extra vraag zou kunnen zijn: wanneer is het hellingspercentage 100%? Gebruik dit bijvoorbeeld als introductie voor de tangens.

Tijdens het onderzoek ontdekten we dat een kleine aanpassing van een standaardopgave al veel denken teweeg kan brengen. Zo kwam een docent met het idee om een noodzakelijk gegeven weg te laten. In groepjes mogen leerlingen dan bespreken welke informatie ze graag zouden willen hebben. Vervolgens geeft de docent elk groepje apart de gevraagde informatie. Niet elk groepje vraagt om hetzelfde gegeven en dat geeft de docent de mogelijkheid om bij de nabespreking te kijken naar de verschillende manieren van oplossen. Bij de uitvoering in de klas maakte de docent tijdens de nabespreking een foutje, dat zij wist te benutten om ook nu het denken te activeren. Zie kader 2. Tijdens het onderzoek ontdekten we een aantal tips die bij het (her)ontwerpen van opgaven in de praktijk erg nuttig blijken. In kader 3 staat een lijstje met onze top 10. Hierbij geldt natuurlijk dat niet elke opgave aan deze punten zal voldoen. Hopelijk biedt dit lijstje wel inspiratie om ook zelf opgaven te ontwerpen die het wiskundig denken stimuleren.

Denkactiverend lesgeven

In verschillende artikelen staat dat de docent een sleutelrol speelt als het draait om het denken van leerlingen. Zo

Kader 2: Een praktijkvoorbeeld



De docent maakt een fout door bij lijn *CC'* te schrijven dat deze 2100 lang is.
Leerling: 'Die zijde is toch 1350?'
Docent: 'Heb ik een fout gemaakt? Ja, je hebt gelijk.'
De docent kijkt even in de papieren hoe lang de zijde hoort te zijn.
Docent: 'Die kan natuurlijk helemaal geen 2100 zijn! Waarom niet?'
Leerling: 'Omdat hij dan even lang zou zijn als de andere zijde.'
Docent: 'Ja, en kunnen er in een driehoek twee zijdes even lang zijn?'
Leerling: 'Nee.'
Docent: 'Ja.'
Leerling: 'Maar niet de schuine zijde.'
Docent: 'Juist!'

benadrukken Doorman, Fechner, Jonker en Wijers (2014) dat een goede docent bij een routineopgave een goede vraag kan stellen die het denken activeert. Andersom kan een docent een denkactiverende opgave ook dusdanig benaderen dat de leerling niet meer zelf hoeft te denken. Met dit in het achterhoofd zijn we kritisch naar onszelf gaan kijken. Er is regelmatig gereflecteerd op eigen, maar ook op elkaars lessen. Al snel ontdekten we dat de docenten inderdaad een zeer grote rol spelen in het

Kader 3: Top 10

De ideale denkactiverende wiskundeopgave:
- gaat over hoe én waarom;
- is een aansprekend probleem voor de leerling;
- heeft iets te bieden voor zowel de sterke als de zwakke leerling;
- kan op verschillende manieren worden aangepakt;
- is origineel of verrassend;
- vereist meerdere denkstappen;
- is open en niet te sturend;
- leent zich voor discussie tussen leerlingen of in de hele klas;
- zet aan tot terugkijken en reflectie;
- nodigt uit tot verder denken en vervolgvragen.

Kader 4: Een praktijkvoorbeeld

Leerling: 'Is dit antwoord goed?'
Docent: 'Wat denk je zelf?'
Leerling: 'In het voorbeeld ziet het er ongeveer ook zo uit.'
Docent: 'En is dat dan altijd zo? Of zijn er ook uitzonderingen?'

stimuleren van wiskundig denken. Wiskundig denken stijgt steeds meer uit boven de denkactiverende opgave naar de hele les. Het wordt een vast onderdeel van het lesgeven, of zoals een van de docenten het uitdrukte, een *way of life* om er doorlopend alert op te zijn om kansen aan te grijpen om het denken van leerlingen te triggeren.
Om leerlingen wiskundig te laten denken is het belangrijk om vragen te stellen. Dit kan bijvoorbeeld wanneer een leerling de docent een vraag stelt. Een praktijkvoorbeeld staat in kader 4. Als de docent niet het antwoord geeft, maar de vraag herformuleert of omvormt tot een iets eenvoudigere, dan wordt de leerling zelf weer aan het denken gezet. Of als de leerling wil weten of hij het goede antwoord heeft: Hoe zou je dit kunnen controleren? Dit zijn kleine aanpassingen in de manier van lesgeven, die een groot verschil maken in het denken van de leerling.
Welke vragen zetten aan tot wiskundig denken? Dat hangt sterk van de situatie af. Open vragen, die leerlingen op een ander niveau laten denken, zijn vaak erg effectief: Waarom?, Geldt dit altijd? en Kun je dat bewijzen?. Omdat goede vragen vaak zo specifiek zijn voor de les en de klas/leerling die je voor je hebt, is het goed om tijdens de lesvoorbereiding al na te denken over vragen die leerlingen aan het denken zetten. Andere tips zijn te vinden in onze top 10, zie kader 5.

Kader 5: Top 10

De ideale denkactiverende wiskundedocent:
- geeft geen antwoorden, maar stelt vragen;
- geeft leerlingen denktijd;
- vraagt door op reacties van leerlingen;
- heeft zelf plezier in wiskundig denken;
- bedenkt bij het voorbereiden van de les op welke manier hij het denken kan activeren;
- besteedt aandacht aan het oplossingsproces;
- reflecteert met de hele klas op de gebruikte strategieën;
- bouwt de hoeveelheid hulp in de loop van de tijd af;
- geeft het wiskundig denken ook een plaats in de toets;
- is doorlopend alert op kansen om leerlingen aan te zetten tot wiskundig denken.

Meer informatie

Als u op *YouTube* zoekt op de term 'wiskundig denken' vindt u een drietal filmpjes en een trailer met daarin meer informatie over wiskundige denkactiviteiten en een kijkje in de klas bij verschillende docenten. Een handreiking voor docenten, met daarin praktische tips om met wiskundig denken aan de slag te gaan, is te vinden op *www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/2015_nro_wda.pdf*. De opgaven die binnen dit project zijn ontworpen zijn online beschikbaar op *www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/wda*.

Noten

[1] Dit onderzoek is mogelijk gemaakt door het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO), projectnummer 405-14-502.
[2] Drijvers, P. (2015). Kernaspecten van wiskundig denken. *Euclides, 90*(5), 4-8.
[3] Doorman, M., Fechner, S., Jonker, V., & Wijers, M. (2014). *Mascil. Richtlijnen voor het ontwikkelen van lesmateriaal voor onderzoekend leren in wiskunde en natuurwetenschappen met behulp van beroepscontexten.* Utrecht: Freudenthal Instituut.
[4] Van Streun, A., & Kop, P. (2012). Wiskundige denkactiviteiten. In P. Drijvers, A. van Streun & B. Zwaneveld (Red.), *Handboek wiskundedidactiek* (pp. 339-368). Amsterdam: Epsilon.
[5] Drijvers, P. (2015). Denken over wiskunde, onderwijs en ICT. *Euclides, 90*(7), 4-10.

Met dank aan

Benno Boerboom en Irene Vis (Het Nieuwe Eemland, Amersfoort), Chesten Breijer, Laurens Visscher en Annie Wevers (Farel College, Amersfoort) en Dirk Boleij en Mascha Klerx (Maurick College, Vught).

Over de auteurs

Marieke Bor heeft als junior onderzoeker meegewerkt aan het onderzoek 'Wiskundige denkactiviteit in de praktijk'. E-mailadres: *mariekebor@gmail.com*. Paul Drijvers is hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en wetenschappelijk onderzoeker bij Cito.
E-mailadres: *p.drijvers@uu.nl*

MEDEDELING



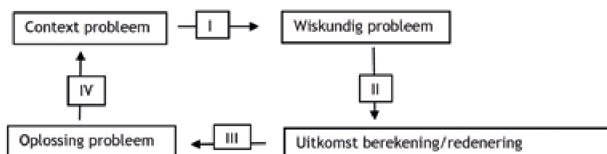
PRIJSUITREIKING EN INSCHRIJVING EERSTE RONDE

Op vrijdag 13 november werden op de Technische Universiteit Eindhoven de winnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade in het zonnetje gezet. Na drie rondes waren er in elke categorie (zesde klas, vijfde klas en vierde klas en lager) vijf prijswinnaars die onder andere een geldbedrag variërend van 50 tot 250 euro ontvingen, mogelijk gemaakt door de NVvW. Heel bijzonder is dat de hoogste score is gehaald door een derdeklasser, Levi van de Pol van het Ichthus College Veenendaal. Hij maakte als enige de finale foutloos. De andere nummers 1 waren Ludo Dekker (Johan de Witt Gymnasium Dordrecht) in de categorie vijfde klas en Matthew Maat (Bonhoeffer College Enschede) in de categorie zesde klas. De volledige uitslag vindt u terug op *www.wiskundeolympiade.nl*

In januari start alweer het nieuwe wedstrijdjaar. Laat uw leerlingen ook hun krachten meten bij deze wedstrijd. De beste *duizend* leerlingen van de eerste ronde gaan door naar de tweede ronde en er zijn ook vier scholenprijzen te verdelen. Schrijf uw school in via *www.wedstrijd.wiskunde-olympiade.nl.* U kunt vervolgens zelf een geschikte dag en tijd uitzoeken in de periode van 18 t/m 28 januari om de eerste ronde op school af te nemen. Als u voor het eerst wedstrijdleider bent, kunt u inloggen op de wedstrijdsite door bij zowel de gebruikersnaam als bij het wacht-woord op de wedstrijdsite de brincode van uw school in te voeren. De rest wijst zich dan vanzelf. In oktober zijn de informatiepakketten verzonden naar alle scholen. Als u meer posters, brochures of leaflets wilt, kunt u deze aanvragen via *info@wiskundeolympiade.nl*

KLEINTJE DIDACTIEK

CONTEXTOPGAVEN – DEEL 2



figuur 1 Vierslagmodel dat ook gebruikt wordt bij wiskundig modelleren

In het vorige nummer beschreef ik de schrapmethode als hulpmiddel voor leerlingen die moeite hebben met contextopgaven. Hieronder een methode gebaseerd op het vierslagmodel, zie figuur 1. Procentenopgave passend bij een hoofdstuk over procenten, wiskunde onderbouw havo-vwo:

Bij een zorgverzekeraar moet een volwassene in 2016 € 98,25 per maand aan premie betalen. Dit is een stijging van € 27,60 per jaar ten opzichte van 2015. Met hoeveel procent is de premie in 2016 ten opzichte van 2015 gestegen? Rond je antwoord af op één decimaal.

Toegepast op de procentenopgave betekent dit het volgende:

I Context probleem → wiskundig probleem

De eerste vraag aan leerlingen is dan welk wiskundig probleem er hoort bij het gegeven praktische probleem, de context. Genoemde bedragen omrekenen naar dezelfde tijdseenheid (maand of jaar).

Bijvoorbeeld € 27,60 per jaar is € 2,30 per maand.

II Wiskundig probleem → uitkomst berekening/redenering

De volgende vraag is met welk wiskundig gereedschap je dit kunt oplossen, in dit geval met procentberekeningen.

$$\text{Premie 2015} = \frac{98,25}{95,95} \cdot 100 = 102,397...$$

III Uitkomst berekening/redenering → oplossing probleem

Stap drie is de wiskundige oplossing omzetten in een praktische oplossing door bijvoorbeeld een eenheid toe te voegen of in een hele zin te antwoorden. Is de vraag beantwoord? Nee, stijging = 102,397... - 100 = 2,397... Afronden op één decimaal en het procentteken erbij zetten: 2,397 ≈ 2,4%.

IV Oplossing probleem → context probleem

De vierde stap is controleren of het gevonden antwoord wel kan in de praktijk. Het gaat dan om een controle van de orde van grootte dus een schatting. Controleren antwoord: 2,4% kan dat wel? Ja, want 1% is ongeveer 1 euro dus 2,30 euro is ruim 2%

Door deze stappen vaker expliciet met leerlingen te bespreken, wordt het analyseren van praktische problemen gemakkelijker. Uiteraard verloopt het denkproces bij leerlingen complexer dan dit schema; het is dan ook een vereenvoudigd model van de werkelijk-heid. De meeste leerlingen slaan stap IV over.

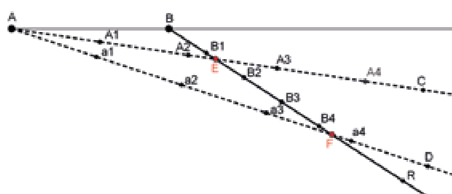
Lonneke Boels

UITDAGENDE PROBLEMEN

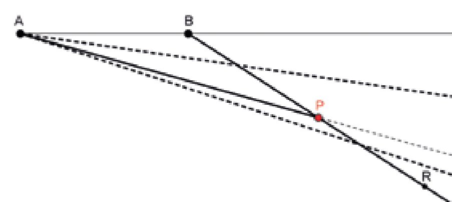
Jacques Jansen

AFSTANDSVERHOUDINGEN

Jacques Jansen schetst een toepassing van dynamische en analytische meetkunde. Daarbij schiet Apollonius van Perga de stuurman van een schip te hulp door een onderscheppingsprobleem op te lossen.



figuur 1

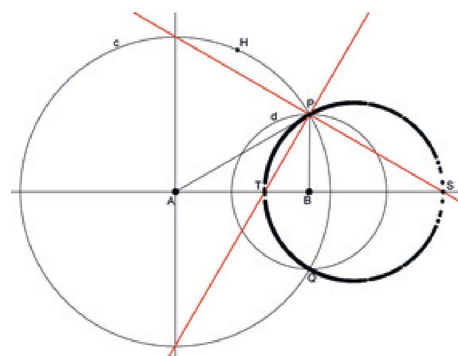


figuur 2

Een schip vertrekt met een constante snelheid v vanuit plaats B in een vaste richting BR. Vanuit plaats A vertrekt op hetzelfde tijdstip een ander schip waarvan de constante snelheid w een factor k groter is. Er geldt dus $w = k \cdot v$. In welke richting moet dat andere schip varen om het eerste schip zo snel mogelijk te onderscheppen? Voor u als lezer is het wellicht aardig om eerst zelf aan de slag te gaan voordat u verder leest. Toch kan ik mij voorstellen dat u de context wat kaal vindt. Vandaar dat we vanuit plaats B een koopvaardijschip laten vertrekken en vanuit plaats A een piratenschip. Blijft het koopvaardijschip zijn vaarroute aanhouden als duidelijk wordt dat de piraten snode plannen hebben?
De Amerikaanse wiskundige Paul J. Nahin[1] ging nog een stap verder door vanuit plaats A een torpedo – dit tijdens de tweede wereldoorlog – af te laten schieten op een vijandelijk schip met een vaste vaarroute vanuit plaats B.

Tweemaal zo snel

Eerst gaan we met de leerlingen een specifieke situatie bekijken. Veronderstel $k = 2$. Ofwel: $w = 2 \cdot v$. Het lijkt raadzaam om de leerlingen een situatieschets te laten maken. Zie figuur 1.
Van het piratenschip zijn twee mogelijke routes getekend, in de richting van C en van D. Bij deze routes zijn de locaties van het schip na 1, 2, 3 en 4 uur getekend, net als bij de vaarroute van het koopvaardijschip. We zien bij vaarroute AC dat het koopvaardijschip eerder bij kruising E is dan het piratenschip. Bij de vaarroute richting D is het piratenschip eerder bij de kruising F. Laten we de juiste kruising P noemen. Dan zal vaarroute AP ergens tussen vaarroute AC en vaarroute AD inliggen. Er zal dan gelden dat: $AP = 2 \cdot BP$. Zie de schets in figuur 2. Hier hebben we dus een relatie tussen twee afstanden. Het quotiënt van de afstanden AP en BP moet constant zijn. In dit geval is die constante gelijk aan 2.
Nu weten de leerlingen uit de analytische meetkunde wél iets over de *som* en het *verschil* van zulke afstanden AP en BP (dat zijn een ellips, respectievelijk een hyperbool), maar de vraag is nu: Wat is de verzameling van alle punten P waarbij het quotiënt van de afstanden PA / PB tot de vaste punten A en B constant is?
Veronderstel dat PA / $PB = 1$. Dit betekent dus dat $PA = PB$. Dit is voor de leerlingen bekend: de meetkundige plaats is de middelloodlijn van lijnstuk AB.
Veronderstel nu dat PA / $PB = 2$ zoals dat is bij ons onderscheppingsprobleem. Wat is nu de meetkundige plaats? Dat kunnen we onderzoeken met behulp van *GeoGebra*. We tekenen eerst de vaste punten A en B. We zoeken nu een punt P met de eigenschap dat PA / $PB = 2$. We maken gebruik van een hulppunt H en tekenen de cirkel c met A als middelpunt en AH als straal. Dan tekenen we een cirkel d met middelpunt B en een straal die de helft is van de lengte van AH. De snijpunten van de cirkels c en d noemen we P en Q. Punt H laten we van plaats veranderen en we zetten het spoor aan in punt P (later ook in punt Q). Zie figuur 3. Het spoor lijkt verdacht veel op een cirkel. Deze cirkel snijdt lijn AB in de punten T en S. En laat deze punten nu de snijpunten zijn van de bissectrices van $\angle APB$. Waarom?

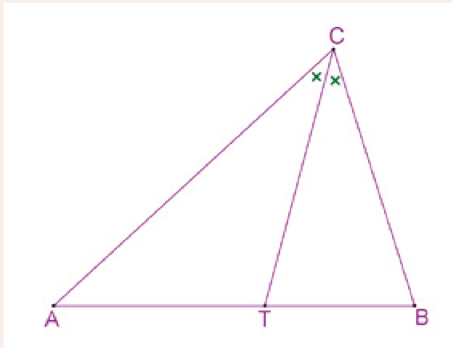


figuur 3 PA / $PB = 2$

De bissectrice van $\angle APB$ verdeelt zijde AB in twee stukken AT en BT die evenredig zijn met zijden AP en BP. Waarom dat zo is? Zie de stelling in kader 1.
Er geldt: $PA / PB = TA / TB = 2$. Dit geldt ook voor de buitenbissectrice: $PA / PB = SA / SB = 2$. Hierbij is punt S snijpunt van de buitenbissectrice van $\angle APB$ met lijn AB. De twee bissectrices staan loodrecht op elkaar.

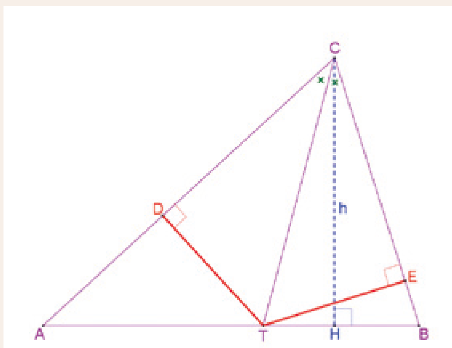
Kader 1

Een bissectrice in een driehoek verdeelt de overstaande zijde in de verhouding van de aanliggende zijdes. Dit geldt zowel voor de binnen- als de buitenbissectrice, dus in figuur 4 geldt: $AC / BC = AT / BT$.

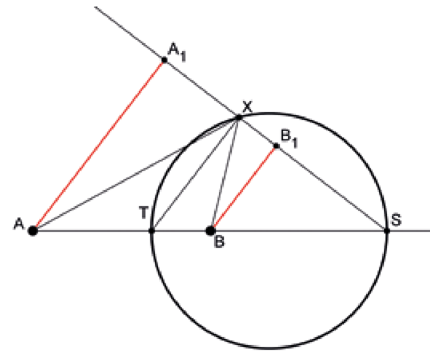


figuur 4

Bewijs:
Vanuit punt C laten we een hoogtelijn h neer op zijde AB. Het voetpunt noemen we H. Vanuit punt T trekken we hoogtelijnen naar zijden AC en BC. Die voetpunten noemen we respectievelijk D en E, zie figuur 5. Er geldt: $DT = ET$ (*bissectrice*). De lengte van deze lijnstukjes geven we aan met d. We berekenen op twee manieren de oppervlakten van driehoek ATC en driehoek BTC en leiden hieruit een verhouding af.
Opp. driehoek $ATC = 0{,}5 \cdot h \cdot AT = 0{,}5 \cdot d \cdot AC$
Opp driehoek $BTC = 0{,}5 \cdot h \cdot BT = 0{,}5 \cdot d \cdot BC$
Dus Opp. driehoek ATC / Opp. driehoek $BTC = AT / BT = AC / BC$. Voor de buitenbissectrice geldt een analoog bewijs.



figuur 5



figuur 6

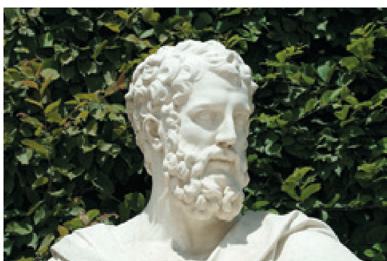
Met behulp van de stelling van Thales zien we dat het spoor deel is van een cirkel met middellijn TS. Dit geldt ook als het quotiënt PA / PB andere waarden aanneemt dan 2. We bekijken nu de situatie waarbij $PA / PB = k$ en $k > 0$. Op lijn AB zelf liggen twee van die punten: T en S. Er geldt dus $SA / SB = TA / TB = k$. Verder is de cirkel getekend met TS als middellijn. We hebben al geconcludeerd dat de meetkundige plaats van punten P met $PA / PB = k$ deel is van deze cirkel maar we willen ook aantonen dat voor een willekeurig punt X op die cirkel ook geldt dat $XA / XB = k$. Zie figuur 6.
Vanuit de vaste punten A en B trekken we loodlijnen op lijn XS. De voetpunten noemen we respectievelijk A_1 en B_1. Er geldt: AA_1 is evenwijdig met BB_1. Die evenwijdigheid levert het volgende op:
- $AA_1 / BB_1 = SA / SB = k$
- $XA_1 / XB_1 = TA / TB = k$

De rechthoekige driehoeken AA_1X en BB_1X zijn dus gelijkvormig. De schuine zijden XA en XB hebben daardoor de zelfde verhouding als AA_1 met BB_1. Dus geldt $XA / XB = k$. Punt X behoort dus tot die meetkundige plaats.
Samengevat: de meetkundige plaats van de punten P, waarvoor $PA / PB = k$ ($k \neq 1$) is een cirkel met TS als middellijn, waarbij T en S punten zijn die het lijnstuk AB in- en uitwendig verdelen in de verhouding k. Deze cirkel heet de *cirkel van Apollonius* bij verhoudingsgetal k. Apollonius van Perga (ongeveer 262–190 v. Chr.) was een Grieks meetkundige en astronoom, zie figuur 7.

Wat gaat de stuurman van het piratenschip doen?

De stuurman van het piratenschip, zie figuur 2, construeert de cirkel van Apollonius met verhoudingsgetal 2 en gaat vervolgens deze cirkel snijden met halflijn BR om het gewenste punt P te vinden. Dit kan hij doen met het volgende recept:
- punten T en S construeren op lijn AB;
- cirkel construeren met TS als middellijn;
- deze cirkel snijden met halflijn BR.

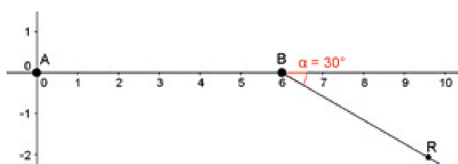
We kunnen nu met behulp van analytische meetkunde de coördinaten van het middelpunt en de grootte van de straal van de Apolloniuscirkel berekenen. Laten we even aannemen dat $AB = 6$ en dat BR een hoek van 30° maakt



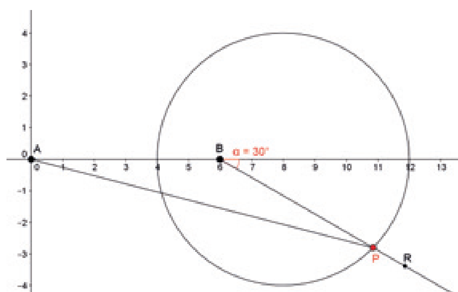
figuur 7

met lijn *AB*. We plaatsen punt *A* in de oorsprong van een assenstelsel en punt *B* in punt (6,0).Verder weten we dat $k = 2$. Zie figuur 8. Een willekeurig punt *P* op de bijbehorende Apolloniuscirkel duiden we aan met (x,y).
Er geldt nu: $PA = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ en $PB = \sqrt{((x - 6)^2 + y^2)}$; $PA / PB = \sqrt{(x^2 + y^2)} / \sqrt{((x - 6)^2 + y^2)} = 2$.
Wat te herleiden is tot $(x - 8)^2 + y^2 = 16$, en dit is een cirkel met middelpunt (8,0) en straal 4. Kortom de gezochte Apolloniuscirkel. Nu is ook de positie van de onderschepping te bepalen. Eerst maar eens een aanpak met analytische meetkunde.
Het hellingsgetal van lijn *BR* is $\tan(-30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, en de vergelijking van vaarroute *BR*: $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 6)$.

Als we y elimineren we in de vergelijking van de Apolloniuscirkel krijgen we $(x - 8)^2 + y^2 = 16$, dat geeft: $(x - 8)^2 + 1/3(x - 6)^2 = 16$. Dat is te herleiden tot: $x^2 - 15x + 45 = 0$ met als exacte oplossingen: $x_{1,2} = ½(15 \pm 3\sqrt{5})$. De voorwaarde voor de gezochte oplossing luidt: $x \geq 6$. De gezochte x-waarde is dan afgerond: 10,85. Dat levert voor de positie van de onderschepping op: (10,85;–2,80).



figuur 8



figuur 9

Andere aanpak om de positie van de kruising te vinden

In plaats van de aanpak met analytische meetkunde is het wellicht aardig om de leerlingen erop te wijzen dat het ook anders kan door te kijken wat er al gegeven is van driehoek *ABP*. Zie figuur 9. $\angle ABP = 150°$ en $AB = 6$. Verder geldt $PA / PB = 2$. Een cruciaal moment, u herkent het? U als docent bent nu onmisbaar. Wat verklapt u? Komen de leerlingen op het idee om variabele x in te voeren voor de lengte van *AP* en de cosinusregel te gaan toepassen met als resultaat: $(2x)^2 = 36 + x^2 - 2x \cdot 6 \cdot \cos(150°)$?

Tot slot

Nu we de meetkundige plaats kennen van het constant zijn van $PA + PB$, $PA - PB$ en PA / PB blijft er voor u als lezer nog de uitdaging over: Wat is de meetkundige plaats van alle punten *P* waarbij het *product* van de afstanden tot de punten *A* en *B*, dus $PA \cdot PB$ constant is?[2]

Noten en bronnen

[1] Nahin, P. (2007). *Chases and escapes: The mathematics of pursuit and evasion*. Princeton: University Press
[2] Zie ook *http://nl.wikipedia.org/wiki/Ovalen_van_Cassini*
Bottema, O. (1997). *Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven
Aarts. J. (2007). *Meetkunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven
Molenbroek, P. (1952). *Leerboek der Vlakke Meetkunde*. Groningen: Noordhoff
Website Dick Klingens: *www.pandd.demon.nl/apolcirk.htm*
Met dank aan Math Wielders, oud-docent Open Universiteit

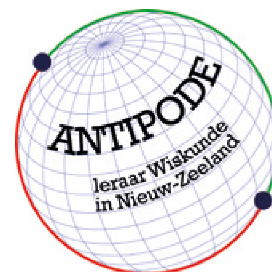
Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen. E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

TEGENVOETER

TOETSEN

Roland Meijerink



Kia ora! Mijn naam is Roland Meijerink, ik ben 33 jaar en sinds eind januari docent wiskunde op Karamu High School in Hastings, Nieuw-Zeeland. Op deze plek ga ik u regelmatig op de hoogte houden van mijn belevenissen aan de andere kant van de wereld.



Geen idee bij de toets? Teken dan je leraar! Dank aan Zoë Hannay voor de tekening.

Bovenbouwleerlingen doen hier per onderwerp een toets. Ze krijgen geen cijfer, maar een *Not Achieved* (onvoldoende) of een van de drie varianten van *Achieved* (voldoende, goed en zeer goed). De eerste categorie levert uiteraard geen studiepunten op, de andere varianten elk evenveel.

In het begin vond ik het nakijken van toetsen maar lastig. Dit ondanks de aanwezigheid van een *standard* (het vage examenprogramma), een officiële toelichting daarop (net iets minder vaag), en het antwoordenmodel dat bij de toetsen van de vakvereniging zit (concreter, maar niet altijd volledig en consistent). Leerlingen moeten voor elke beoordelingsvariant een bepaald aantal vaardigheden of inzichten tonen, door middel van een berekening of een opmerking. Maar welke zijn toegestaan, optioneel dan wel verplicht? Is die ene slecht geformuleerde opmerking nu voldoende of niet? Kleine (reken)fouten mag je soms laten passeren, maar wat is 'klein'? Voor slordigheidsfouten mogen leerlingen soms een tweede inleverpoging doen, waarin ze hun fout snel moeten kunnen herkennen en verbeteren. Wanneer mag je ze die kans geven? Na een paar maanden is het me duidelijk dat het niet alleen voor mij als beginner lastig is. Het systeem bestaat pas een paar jaar en ook collega's worstelen er nog vaak mee.

> 'KLEINE (REKEN)FOUTEN MAG JE SOMS LATEN PASSEREN, MAAR WAT IS 'KLEIN'?.'

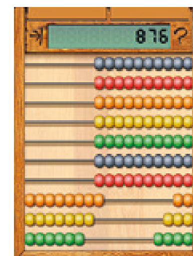
Gelukkig is er binnen de sectie een systeem van *check marking*. Je wisselt bij elke toets met een collega het werk van acht leerlingen uit. Je zorgt ervoor dat je na discussie op dezelfde beoordeling uitkomt. In theorie gaat dat blind, dus zonder correcties of voorlopige beoordeling op het gemaakte werk. In de praktijk doe ik er meestal een geeltje op met een voorstel en enkele opmerkingen. Met dit systeem voorkom je niet alleen fouten en inconsistente beoordelingen, maar praat je vooral heel veel over lesgeven en vakinhoud. Daardoor leer je enorm veel van elkaar! Daarnaast worden sommige toetsen ook nog extern gemodereerd. De sectievoorzitter kiest een aantal toetsen die onderling al gecontroleerd zijn en stuurt die op naar NZQA, de overheidsorganisatie die het curriculum beheert. Na een aantal maanden krijgen we kritiek van de zogeheten *moderators* en die kan vrij pittig zijn. Soms komen ze bij meerdere toetsen op een andere beoordeling uit dan wij als sectie. De boordeling hoeven we dan niet achteraf aan te passen, maar de kritiek dient als input voor volgend jaar. En bij teveel discrepanties worden we ongetwijfeld op de vingers getikt.

Zoals eerder gezegd vind ik het ontbreken van de schijnnauwkeurigheid van cijfers sympathiek en de (onderlinge) kwaliteitscontrole is uitstekend. Toch heeft het systeem naar mijn bescheiden mening nog veel onduidelijkheid en willekeur. Wellicht helpen een paar extra maanden ervaring en het per onderwerp op papier zetten van een duidelijke checklist daarbij.

Alle opmerkingen die ik tot nu toe over toetsen heb gemaakt, gelden in principe alleen voor de bovenbouw. De onderbouw komt later aan de orde. Meer lezen? Ga naar *www.tegenvoeters.nl* of stuur een reactie naar *rmeijerink@karamu.school.nz*.

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

Lonneke Boels



STEEN–PAPIER–SCHAAR

Lonneke Boels schreef al eerder over een website met allerlei verantwoorde wiskundespelletjes. Deze keer bekijkt ze op dezelfde website een spel dat zeer populair is onder leerlingen: steen-papier-schaar.



figuur 1 De hond is bijna bevrijd figuur 2 Game 1 gewonnen

Het spel steen-papier-schaar is te vinden op de website *http://play.ccssgames.com* onder de naam *Markov*. Steen maakt de schaar bot, de schaar knipt het papier en het papier pakt de rots in. Anders gezegd: steen wint van de schaar, de schaar van het papier en papier van de rots. Wie wint is dus afhankelijk van wat jij en de ander kiezen. In het digitale spel win je in die gevallen een ronde van Markov. Kiezen Markov en jij beiden een steen, dan wint Markov. Het doel is om een hondje te laten ontsnappen dat op een schotel op een paal staat. Als de paal boven is, ontsnapt de hond.
Het interessante van deze game is dat de zetten van Markov worden bijgehouden zowel onderin het scherm als in de grafiek ernaast. Markov houdt een logische volgorde aan, maar niet altijd. Vanaf game 3 kun je een strategie instellen. Hierdoor hoef je niet meer na elke zet na te denken over je volgende zet. Het spel wordt nu voor je gespeeld en door een en ander te optimaliseren, kun je heel snel winnen – of verliezen. Op de video's voor leerlingen wordt dit uitgelegd. In de docentenvideo wordt nog extra informatie gegeven.

Pluspunten

— het is een echt spel;
— het is echte wiskunde uit het domein statistiek;
— bij dit spel gaat het echt om de data op zichzelf. De data worden niet gebruikt voor een ander type wiskunde;
— het gebruik van statistiek maakt dat je sneller wint;
— het sluit aan bij het nieuwe examenprogramma waarbij data verzamelen en interpreteren een belangrijke rol speelt;
— het is leuk en uitdagend om te doen;
— het kan in de klas worden getoond met beamer of digitaal schoolbord. In het computerlokaal is het natuurlijk nog leuker;
— het is zowel in onderbouw als in bovenbouw te gebruiken;
— het spel kent vier niveaus;
— het spel spelen kan waarschijnlijk wel in één lesuur. Verspreid het over twee lesuren om tussendoor discussie te kunnen hebben of neem een tweede lesuur om over het geleerde te discussiëren.

Minpunten

— het is niet beschikbaar als offline app op de telefoon en daardoor zullen leerlingen het minder snel in hun vrije tijd gaan spelen. Het spel werkt op zich wel op veel telefoons maar vanwege de ruimte die nodig is voor de grafiek, tabel en het spel is dit onhandig.

Geschikt voor: brugklas en tweede klas vmbo, havo en vwo. Leuk als herhalingsles voor 3 havo, 4 havo wiskunde A, 3 vwo en 4 vwo wiskunde A en C.
Achtergrondinformatie over het ontwerp van dit soort spellen en de achterliggende (didactische) gedachten zijn te vinden op de eerder genoemde website. Na registratie is extra uitleg voor docenten beschikbaar.

Eindoordeel: aanschaffen

Kosten: gratis
Getest op: laptop met Windows 8 en browser Google Chrome. Ook geschikt voor: Firefox (v.4 en hoger), Safari (v.5.1 en hoger), Chrome (alle), Internet Explorer (v.9 en hoger). Werkt zowel op PC als op Mac. Zou ook op de iPad moeten werken maar wordt nog niet aangeraden door de makers; het is mij wel gelukt.

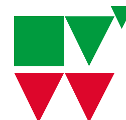
Meer informatie: *http://escholarship.org/uc/item/31t469kg#page-3* en *http://play.ccssgames.com*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen. E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

JAARREDE 2015

Swier Garst



Dit jaar vierde onze vereniging haar negentigjarig bestaan. En ja het was een groot feest daar in Hilversum. De leden van het organisatiecomité zijn terecht overladen met complimenten voor de perfecte organisatie. Zo schreef iemand: 'heb ik toch een week zitten denken om een puntje van kritiek te vinden, is dat toch mij echt niet gelukt!'

Intussen kijken we vooruit, bijvoorbeeld naar het honderdjarig bestaan van onze vereniging in 2025. Dat brengt ons gelijk al in de toekomst en in onze tak van sport op de vraag 'hoe het onderwijs er dan qua vorm en inhoud uit zal zien.' Laten we even stil staan bij dit onderwerp. Zoals het er nu naar uitziet zou het weleens kunnen zijn dat de leerlingen van nu zo'n 50 jaar moeten werken en dan komt de vraag naar boven of opleiden voor één beroep dat 50 jaar houdbaar is nog wel voldoende is. Zeker als je de technische ontwikkelingen van nu en straks in ogenschouw neemt. 50 jaar werken betekent dat iemand van 50 jaar op de helft is van zijn arbeidzame leven. Ofwel: op je vijftigste nog 25 jaar te gaan. Voor die generatie maken we onderwijs.

Onderwijs heeft behalve de functie van het opdoen van informatie ook en misschien zelfs wel vooral een vormende waarde. En dan komen we automatisch bij ons mooie vak wiskunde! Behalve dat we de leerlingen de taal leren waarin de techniek is opgeschreven, de wiskunde dus, gaat er van ons vak ook een grote vormende waarde uit als het gaat om problemen te leren oplossen door je vragen te stellen als waar gaat het precies om, kunnen we het probleem in deelproblemen splitsen, zijn er andere manieren dan de voor de hand liggende om naar het probleem te kijken... En ja wie is er dus niet druk met wiskundige denkactiviteiten. Kort en goed het vak wiskunde leent zich bij uitstek om jonge mensen een exacte vorming te geven die twee of misschien meer beroepen lang haar waarde moet bewijzen. Deze gedachte bracht ons als bestuur het platform2032 te adviseren het onderwijs zo in te richten dat de burger van de toekomst sociaal en technisch wendbaar moet zijn. Tot onze grote tevredenheid hebben we gezien dat het platform2032 deze gedachten heeft overgenomen: Citaat: Het aanleren van taal en rekenen/wiskunde blijft wat het Platform betreft van groot belang.

Met het noemen van rekenen/wiskunde komen we onvermijdelijk op de discussie rondom de rekentoets. Deze discussie laaide in januari van dit jaar weer op. En ja het is zeker de vraag of het VAK rekenen ons van is. Maar feit is dat steeds meer wiskundeleraren belast werden met onderwijs in rekenen. En ja onze vereniging heeft in het verleden ook steeds gezegd: het is ons vak niet, maar wij kunnen het wel het beste. Goed met alle voors en tegens hebben we onze vinger opgestoken en gezegd: oké, als je over rekenen in het voorgezet onderwijs wilt praten, doe dat dan maar met de NVvW. Wij willen graag praten over goed reken ONDERWIJS! Dan eerst maar eens over goed onderwijs, en de positie van de toets komt dan vanzelf. Hoe vanzelfsprekend ook, zowel op het ministerie als bij de onderwijswoordvoerders van bijna alle politieke partijen werd het verleggen van de discussie van de rekenTOETS naar het rekenONDERWIJS met een soort zucht van verlichting ontvangen. Vaak zag men op tegen het eerste gesprek met wiskundeleraren (een soort trauma van vroeger) en ja het bestuur kon toch niet anders zijn dan van het ergste soort maar dan blijkt dat je met die lui toch ook heel verstandig en vrolijk kunt praten.

Dat leidde tot een motie waarin de staatssecretaris is gedwongen nogmaals met de NVvW te gaan overleggen!! Overigens wie er niet genoeg van kan krijgen: in het laatste nummer van *Euclides* is een artikel over rekenen te vinden.

Instussen lopen er gesprekken om te komen tot een commissie die naar het vmbo programma wiskunde zou kijken. Immers in het vmbo is sprake van een verandering naar een tiental profielen en het is de vraag of één programma voor alle leerlingen hetzelfde zoals nu voldoende is. Zo valt te denken aan een programma met een basis voor alle leerlingen samen met modules die recht doen aan de sector waarin de leerling zijn opleiding volgt. In die verkenning is het dan vanzelfsprekend om de referentieniveaus mee te nemen. Ook die zijn intussen zo'n zeven jaar oud. Het ministerie van OCW wilde met de instelling van een commissie wachten op het rapport van het platform2032 en laat die nou onze wensen ook al mooi hebben opgeschreven. We hebben er alle vertrouwen in dat de neuzen de goede kant op staan, maar u begrijpt: we blijven waakzaam.

Wat de richting van het wiskunde onderwijs ook moge zijn, voor wiskundeonderwijs zijn goede leraren van groot belang. Zo staan we nu aan het begin van een verandering van het programma



in havo/vwo bovenbouw en denkend aan wiskundige denkactiviteiten ook voor een deel in de onderbouw. Dat brengt ons op het project nascholing dat we op verzoek van OCW hebben uitgevoerd. Doelstelling was het ontwerpen van een recept van hoe geef je vakinhoudelijke nascholing, zodat ook andere vakken gebruik kunnen maken van de aanpak zoals die bij wiskunde is gevolgd. Opgemerkt moet worden dat de deelnemers afkomstig waren uit een breed palet van achtergronden. Of dat erg is, daarover hoeven we nu niets te zeggen, dat permanente nascholing nodig is, blijkt ook weer hieruit. Over permanente nascholing zal ook het Deltaplan Wiskunde melding maken. Ook mag de commissie opmerkingen maken over het onderwijs. Ook daar komt de permanente scholing aan de orde. Tevens is er opgemerkt dat het register dan toch echt het best beheerd kan worden door de wiskundige community zelf. Daarbij zou het Platform Wiskunde Nederland een actieve rol kunnen spelen.
Daarmee komen we terug in het heden, de nabije toekomst en de vereniging. Jeugd! Zeker in een poging om jongere mensen aan de vereniging te binden is de vereniging een facebook pagina gestart. Intussen zijn er al zo'n 550 vrienden. Verbonden aan deze pagina. Alleen voor leraren natuurlijk en je aanmelding wordt wel even nagekeken. Kortom als je wel heel veel vrienden van 14 jaar hebt, dan is je kans op toelating wel klein...
Ons blad *Euclides* heeft een nieuwe hoofdredacteur, Tom Goris, en een nieuwe voorzitter van de redactie, Henk Rozenhart. We zijn blij dat in de tijd dat we nog geen nieuwe eindredacteur gevonden hebben, Marjanne Klom bereid is die taak op zich te nemen. Dat in de redactie altijd plaats is voor jonge (van geest) redactieleden is duidelijk. En ja, vanzelfsprekend wensen we de hele redactie veel succes met het maken van ons mooie verenigingsorgaan en het nadenken over de vorm waarin het blad in de toekomst moet verschijnen. Nu we toch namen noemen, mag Erik van den Hout, onze webmaster niet ontbreken. Je merkt niets van zijn werk en dat komt omdat hij dat perfect uitvoert. Zo speelde hij een belangrijke rol bij de organisatie van de verkoop van boeken ten behoeve van het Wereld Wiskunde Fonds. In de rij van namen en communicatie moet die van Heleen van der Ree ook genoemd worden. Onze beleidsmedewerker is van groot belang bij het ondersteunen van het bestuur.
De vereniging heeft vele actieve groepen die zich met wiskundeonderwijs bezig houden. Zo zijn we blij met een weer stijgend aantal leden van de vmbo werkgroep. En met het symposium speciaal gericht op vmbo dat in januari plaats vindt proberen we weer meer leden uit het vmbo te krijgen maar natuurlijk ook aandacht te schenken aan deze grote groep van docenten. Zo proberen we te bevorderen dat docenten uit het vmbo kunnen netwerken en enthousiast kunnen worden over nieuwe lesmethoden, handige tools, didactiekjes, et cetera.
Een andere actieve groep is de HBO werkgroep. Het is deze groep gelukt weer wensen te formuleren op het gebied van wiskundekennis voor leerlingen die van het mbo doorstromen naar het hbo. Een uitvloeisel hiervan zijn de Keuzemodules Voorbereiding HBO, die zorgen voor harmonisatie in onderwijs. Maar deze zijn helaas nog geen verplichting.
Behalve de verschillende werkgroepen binnen onze eigen vereniging hebben we goede contacten met NVORWO en proberen we te komen tot een werkgroep samen met NVORWO om zo doorgaande leerlijnen rekenen/wiskunde van groep 6 tot klas 2 te beschrijven. Met de NVON zijn de gespreksonderwerpen behalve het wel en wee binnen de eigen clubs ook de rol van wiskunde in binnen de natuurkunde. Intussen hebben we ook goede contacten met i&i, de vereniging van informatica leraren. Daar zijn er weliswaar niet zo heel veel van, maar ik kan de syllabus van het vak informatica op havo en vwo zeker in uw aandacht aanbevelen. En dit alles zeker ook nog in het licht van een steeds grotere rol van ict binnen, laten we het ruim nemen, de wereld.
De lengte van de jaarrede zou zonder problemen een lengte kunnen krijgen waar men in Cuba jaloers op zou zijn. Laten we ons dat niet aandoen. En ja dan blijven er onderwerpen liggen: geen boeken maar tablets? Van directiewege opgelegde toetssystemen als RTTI, de vrijheid van scholen en de vrijheid aan de scholen de lessentabel zelf in te vullen, de digitale toets voor de lerarenopleiding, gepersonifieerd leren, de organisatie daarvan en het feit dat 300 scholen het rekenen nog niet op orde hebben, de tussentoets en ongetwijfeld nog veel meer.

Goed negentig jaar oud, gewapend met al die jaren ervaring en de conditie van een jonge hond blijven we als NVvW ijveren waarvoor we zijn opgericht: Het verzorgen van goed wiskundeonderwijs.

Dank u wel.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Marjanne Klom, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2016

za 9/1
UTRECHT
Wintersymposium KWG
Organisatie KWG

18/1 - 28/1
LANDELIJK
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

do 28/1
UTRECHT
Wiskunde conferentie vmbo en havo/vwo onderbouw
Organisatie APS in samenwerking met NVvW en SLO

wo 3/2
LANDELIJK
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie Freudenthal Instituut

vr/za 5/2 6/2
NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskundedagen
Organisatie Freudenthal Instituut

vr/za 11/3 12/3
GARDEREN
finale Wiskunde A-lympiade
Organisatie Freudenthal Instituut

do 17/3
LANDELIJK
W4Kangoeroe
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

wo 23/3
LANDELIJK
Grote Rekendag 2016
Organisatie Freudenthal Instituut

vr 8/4
AMSTERDAM
Congres: Leve de wiskunde!
Organisatie Universiteit van Amsterdam

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 91

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
4	2 februari 2016	23 december 2015
5	22 maart 2016	11 januari 2016
6	10 mei 2016	7 maart 2016
7	28 juni 2016	2 mei 2016

CASIO

Tien redenen om voor de CASIO *fx*-CG20 te kiezen...

6. Ruim 89% van de leerlingen kiest voor de Casio fx-CG20.

In de CASIO fx-CG20 Leerlingentest werden topmerken grafische rekenmachines met elkaar vergeleken. De leerlingen waren er snel uit: de CASIO fx-CG20 is uniek in prestaties en daarmee superieur. In deze en in nog volgende uitgaven van Euclides publiceren wij 10 voordelen die kenmerkend of zelfs uniek zijn voor het werken met de CASIO fx-CG20. Kijk, vergelijk en oordeel zelf.





Unieke één-controle-is-genoeg examenstand.

Na het inschakelen van de examenstand verschijnt gedurende 15 minuten een snel knipperend blauw symbool R (Restriction). Daarna schakelt het blauwe R-symbool over op langzaam knipperen. De surveillant kan dus gedurende het eerste kwartier in één oogopslag controleren of de examenstand zojuist is ingeschakeld. Daarnaast is het display in de examenstand aan drie zijden 'veilig' groen omrand. Een extra controle wordt uitgevoerd met de toetsen [ALPHA] en [(-)]. Een klok geeft aan hoe lang geleden de examenstand is geactiveerd.



De CASIO *fx*-CG20 is CvTE goedgekeurd voor het centraal examen 2016 en daarna.

Gratis CASIO *fx*-CG20 voor uzelf voor drie van uw leerlingen.

Actievoorwaarden en aanmelden voor GRATIS fx-CG20 rekenmachines via www.casio-educatie.nl/actie.

Casio Benelux B.V. - Tel +31 (0)20 545 10 70 – E-mail educatie@casio.nl